

The book cover features a marbled paper design with large, irregular, reddish-brown blotches separated by dark, branching veins. A central rectangular label with a red background and a decorative gold border contains the title. The spine on the left is made of a light-colored, textured material.

TILLY
GÉOMÉTRIE



~~20644~~

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio



Palchetto

Num.° d'ordine / 33.

32636

NAZIONALE

B. Prov.



129

NAPOLI

R. BIBLIOTECA

VITT. EM. III

Q. 1000 -

1

100



RECHERCHES
SUR LES
ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.



*Les formalités voulues par la loi pour assurer la propriété de cet ouvrage
ont été remplies.*

Droits de traduction et de reproduction réservés.

609168

RECHERCHES

SUR LES ÉLÉMENTS

DE

LA GÉOMÉTRIE

PAR

J.-M. DE TILLY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE,
SOUS-LIEUTENANT AU 4^e RÉGIMENT D'ARTILLERIE.



BRUXELLES.

BRUYLANT-CHRISTOPHE ET C^{ie},
LIBRAIRES-ÉDITEURS,
Place Saint-Jean, 18.

PARIS.

CH. TANERA, ÉDITEUR,
LIBRAIRIE POUR L'ART MILITAIRE, LES SCIENCES
ET LES ARTS,
Quai des Augustins, 27.

1860



RECHERCHES

sur les

ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.

PRÉFACE

ET DISSERTATION PRÉLIMINAIRE

Les éléments de la géométrie, comme ils sont exposés dans les auteurs généralement suivis, présentent en plusieurs endroits des lacunes, des imperfections, quelquefois même des théories vicieuses. Ayant été chargé, en 1858, 1859 et 1860, de donner un cours de mathématiques, ces lacunes, ces imperfections et ces défauts ont attiré mon attention; j'ai travaillé opiniâtrément à les faire disparaître, et, sans exposer dans mes leçons des théories nouvelles, ce qui pourrait offrir des dangers lorsqu'on s'adresse à des commençants, je me réservais de réunir et de publier les résultats de mes recherches aussitôt qu'ils pourraient constituer un cours complet.

Telle est l'origine de l'ouvrage que je fais paraître aujourd'hui.

Les modifications principales portent sur les points suivants :

a. La ligne droite ;

b. La théorie des parallèles ;

c. Les démonstrations de quelques propositions ordinairement passées sous silence, et dont certains auteurs modernes considèrent l'introduction dans les éléments comme indispensable ;

d. La présentation de l'idée de mesure sous une forme plus simple et plus positive;

e. La refonte complète des démonstrations relatives à l'aire du cercle, et aux surfaces et volumes des corps ronds;

f. La refonte de la proposition IX de l'appendice au livre IV, laquelle constitue une anomalie géométrique;

g. La démonstration des lemmes sur lesquels Legendre base la mesure des surfaces courbes;

h. Modification apportée à celui sur lequel il s'appuie pour démontrer que deux circonférences sont entre elles comme leurs rayons, et modification de cette démonstration elle-même;

i. Modification apportée à la recherche du plus court chemin entre deux points, sur une sphère;

k. Développements sur la recherche de π .

l. Définition rationnelle des coins et des angles sphériques et recherche directe de leur mesure.

m. Modification des propositions XXIV et XXV du cinquième livre; addition d'une proposition nouvelle.

n. Inscription et circonscriptio des polyèdres réguliers à la sphère.

Je vais donner quelques détails sur ces diverses innovations afin d'en indiquer clairement l'esprit et le but.

a. Chaque auteur de géométrie définit la ligne droite à sa manière, mais je ne pense pas qu'on l'ait fait jusqu'ici d'une manière bien satisfaisante. Legendre en donne cette définition : « La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. » Or, cela ne suffit pas pour établir les propriétés de cette ligne et des figures qui en dépendent. Ce qui le prouve, c'est qu'avant d'entrer en matière, Legendre pose comme axiome (c'est son axiome IV) que d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite, c'est-à-dire un seul plus court chemin, ce qui n'est pas du tout un axiome, mais bien un théorème qu'il faudrait démontrer. En outre, au moment où Legendre donne sa définition, il est impossible de comprendre ce que c'est qu'une ligne plus courte qu'une autre, puisque l'on n'a pas de terme de comparaison.

La plupart des auteurs ont remarqué ces deux écueils et ont cherché à les éviter en définissant ainsi la ligne droite : « C'est une ligne dont

tous les éléments vont dans la même direction. » Avec cette définition on peut démontrer tout ce qui suit, mais son inconvénient réside en elle-même : on ne la comprend pas. Car, en commençant la géométrie, on ne sait pas ce que l'on entend par des éléments qui vont tous dans la même direction ; on ne sait pas même ce que c'est qu'une direction.

Ces deux définitions me semblent donc également insuffisantes. J'en propose une autre, parfaitement claire et compréhensible, et qui suffit à toutes les propositions suivantes.

Il est évident que la notion de la ligne droite existe en nous ; la difficulté ne consistait donc qu'à en donner une définition que l'on pût comprendre, d'abord, et dont on pût ensuite tirer tout le reste.

Je ne me dissimule pas que quelques auteurs ajoutent une troisième condition. Ils voudraient que la définition donnât le moyen de trouver la ligne droite, ou tout au moins d'être assuré de son existence autrement que par la notion première.

Mais je pense que cette troisième condition ne sera jamais satisfaite en même temps que les deux autres, et qu'en tous cas les définitions ordinaires n'y satisfont nullement.

Je l'écarterai donc, à l'exemple de tous les auteurs de géométrie élémentaire et je me bornerai à satisfaire aux deux premières, qui sont certes les plus importantes.

Pour bien concevoir l'avantage de ma définition, il faut remarquer qu'elle ne forme que la moitié de celle de Legendre ; et que c'est précisément la moitié incompréhensible qui est écartée, puis rigoureusement démontrée aussitôt qu'on en est arrivé au point où l'on peut la comprendre. Sans doute, ma définition, de même que toutes celles qui l'ont précédée, laisse dans l'ombre le point de savoir s'il existe, oui ou non, des lignes droites. Mais c'est là un fait. La géométrie, dans toute son acception et toute son étendue, n'est qu'un fait dans la nature, mais c'est un fait complexe, un fait immense, et la science que nous appelons *géométrie* consiste uniquement à détacher de ce fait complexe un fait simple, le plus simple possible, qui suffise pour remonter jusqu'à lui. Ce fait, sur lequel on base la géométrie, c'est l'existence de la ligne droite, et il est évident par suite qu'il faut donner de cette ligne la définition la plus simple possible, qui satisfasse aux deux conditions que j'ai énoncées plus haut.

b. La théorie des parallèles a occupé successivement les plus célèbres géomètres. Leurs recherches, à défaut d'un résultat précis, ont cependant jeté sur la question des traits de lumière tellement brillants qu'il y a presque présomption aujourd'hui à chercher à compléter leur œuvre inachevée.

En étudiant les auteurs qui ont traité la question, on se trouve en présence de cinq systèmes nettement tranchés :

1° Le système d'Euclide, qui consiste à admettre comme évidente par elle-même cette propriété qu'une perpendiculaire et une oblique à une même droite doivent se rencontrer. Comme le lecteur le sait, on en déduit alors sans aucune difficulté et la théorie des parallèles et la somme des trois angles d'un triangle. Évidemment, ce système est le plus simple de tous, mais il a l'inconvénient capital de laisser le doute dans l'esprit puisqu'on y admet un fait sans aucune espèce de preuve. Il n'est donc pas étonnant que les efforts des géomètres aient tendu à perfectionner cette méthode, tout en la compliquant.

2° Le système des infiniment grands. C'est celui qui a reçu la plus large application. Il consiste, en résumé, à adopter comme mesure d'un angle l'espace plan infini compris entre ses deux côtés. Au moyen de cette notion, on peut prouver immédiatement non-seulement le postulat d'Euclide dans toute sa généralité, mais encore la somme des trois angles d'un triangle, sans aucune proposition préliminaire. Les démonstrations sont trop connues pour que je les rapporte ici.

Un grand nombre d'auteurs ont soutenu cette méthode. Je ne saurais partager leur opinion. L'emploi des infiniment grands ne me semble pas de nature à convaincre celui qui débute dans l'étude de la géométrie. L'un de ceux qui ont soutenu ce système avec le plus d'opiniâtreté, M. Noël, ancien professeur à l'Université de Liège, va jusqu'à prétendre qu'on ne parviendra jamais à écarter de la géométrie élémentaire l'idée de l'infiniment grand. Il s'exprime ainsi : « La portion plane entre les côtés d'un angle étant nécessairement infinie, il faut bien se résoudre enfin à employer explicitement l'infini en géométrie, du moins pour les angles. »

Je répondrai d'abord à M. Noël que si l'illustre Legendre a cherché pendant des années une démonstration directe, c'est qu'il n'était pas tout à fait persuadé que l'on ne pouvait pas y arriver. Ensuite, puisque

d'après M. Noël, à cause de l'essence même des quantités angulaires, on ne pourra jamais démontrer directement que la somme des trois angles d'un triangle vaut 2° , comment se fait-il qu'on puisse démontrer directement qu'elle n'est pas plus grande? A quoi tient, je le répète, qu'on nous prouve parfaitement bien que cette somme ne peut dépasser 2° , et qu'il faille venir nous parler d'infini pour prouver qu'elle ne peut rester en dessous? Il m'est impossible d'admettre cela. On n'est pas parvenu jusqu'ici à trouver une démonstration directe, mais il est probable qu'elle existe, et si ceux qui la cherchent ont des motifs de croire qu'ils perdront leur temps, du moins ils n'en ont pas la certitude.

Au reste, il est aisé de voir que M. Noël est décidé à introduire les infinis partout, puisqu'il prétend qu'on ne peut s'en passer pour démontrer directement que tout angle extérieur d'un triangle est plus grand que les angles intérieurs non adjacents, ce qui est complètement inexact.

Les partisans du système des infiniment grands allèguent encore que le commençant admettra cette idée tout aussi bien que celles sur lesquelles s'appuie le reste de la géométrie, et qu'en définitive cette théorie des infinis est élémentaire. Mais de deux choses l'une, ou le commençant ne verra pas les objections qu'il est raisonnable d'opposer à cette théorie (1), ou bien il les verra.

Dans le premier cas, il est clair que sa conviction n'est qu'apparente; c'est absolument comme si vous lui aviez dissimulé un vice de raisonnement, à la manière de Bezout. Dans le second cas, il faudra répondre à ses objections; mais, si la théorie produite tout d'un trait est élémentaire, la réponse aux objections ne serait plus élémentaire du tout.

Je crois donc qu'il faut chercher mieux que toutes ces démonstrations basées sur les infiniment grands. Toutefois, il est juste d'en citer une entre toutes, c'est celle de Bertrand de Genève, qui est connue de tous ceux qui ont étudié la géométrie. Elle est plus ingénieuse et plus

(1) Je dis *raisonnable* et non pas *juste*. On peut, jusqu'à un certain point, répondre aux objections, mais enfin il est raisonnable de les poser, surtout pour celui qui voit une première fois cette théorie.

forte que toutes les autres, mais elle n'échappe pas aux imperfections du système dont elle fait partie.

3° Le système des infiniment petits. C'est celui que Legendre a si brillamment développé dans la proposition XIX de son 1^{er} livre. Je trouve cette méthode fort belle et je n'hésite pas à la préférer à la précédente, mais elle a encore, outre l'inconvénient de soulever une objection que je discute dans la note II et qui me semble avoir échappé à l'attention de beaucoup de professeurs qui suivent cette marche; outre cet inconvénient, dis-je, elle a encore celui d'introduire dans la géométrie élémentaire des considérations infinitésimales.

Je n'ignore pas que ceci sera contraire aux convictions de plus d'un géomètre estimable:

Comment! me dira-t-on, vous voulez bannir aussi l'infiniment petit de la géométrie; mais vous ne savez donc pas qu'il se présente de lui-même dans les angles, dans le passage d'une proportion entre quantités commensurables à une proportion entre quantités incommensurables, et enfin dans l'évaluation des lignes courbes et des surfaces courbes?

Examinons ces trois cas :

Dans les angles, j'ai dit plus haut pourquoi je le nie et je le nie formellement. Il n'y a pas là d'infini; il y a là une démonstration qu'on cherche encore et voilà tout.

Dans le passage d'une proportion entre quantités commensurables à une proportion entre quantités incommensurables?

La démonstration remarquable que je donne dans le texte pour les proportionnalités de ce genre, et dont le fond est dû à M. Mutel, écarte complètement toute idée d'infiniment petit.

Elle établit la proportion demandée, par un raisonnement inattaquable et sans distinction entre les quantités commensurables et celles qui ne le sont pas. Dans la note troisième, j'ajoute à cette méthode un complément qui réfute la dernière objection que l'on pourrait lui opposer. M. Mutel n'avait pas jugé qu'un complément fût nécessaire, et effectivement, selon moi, il ne l'est pas; mais j'ai pensé qu'un excès de rigueur ne peut être un grand mal.

Passons au troisième cas, l'évaluation des lignes courbes et des surfaces courbes. J'ai nié les deux premiers, j'avoue celui-ci :

Oui, l'évaluation des courbes et des surfaces courbes en fonction

des mêmes unités que les lignes droites et les plans nécessite l'admission de quantités infiniment petites.

Ainsi donc ici, l'infiniment petit apparaît. Mais se présente-t-il de lui-même, comme vous le dites? Pas du tout. C'est vous qui l'introduisez. Je pense que l'explication suivante ne laissera aucun doute sur ce point.

Lorsque, par suite d'un raisonnement géométrique, nous parvenons, par exemple, à déterminer la longueur d'une ligne droite provenant de certaines constructions, que signifie ce résultat? Ce résultat n'est qu'une abréviation de procédé. Il est évident que si un être, complètement ignorant des procédés géométriques, mais doué de la perfection inconnue à l'homme sous le rapport des procédés mécaniques, effectuait la mesure de la droite en y posant l'unité (le mètre, si l'on veut) puis le décimètre, etc., il devrait finir par tomber sur le résultat que nous avons trouvé par une autre marche. Lorsque nous évaluons la surface d'un trapèze en fraction exacte d'un mètre carré, on doit donc, en portant sur ce trapèze le mètre carré aussi souvent que possible, puis le dixième de mètre carré, etc., finir encore par arriver à la mesure que nous avons obtenue par un procédé moins laborieux.

Lorsque nous disons que la surface d'un cercle dont le rayon est d'un mètre est comprise entre trois mètres carrés 1,415 centimètres carrés et trois mètres carrés 1,416 centimètres carrés, il est évident que des procédés mécaniques parfaits nous reproduiraient identiquement ce résultat. Il en est de même pour tous les volumes que nous apprenons à mesurer.

On voit donc que la formule qui donne une longueur, une surface, un volume, n'est qu'un moyen d'arriver plus vite au résultat qu'on devrait obtenir en comparant mécaniquement la longueur, la surface, le volume donnés au mètre, au mètre carré, au mètre cube.

Mais dès lors, comment comprenons-nous la longueur d'une courbe et l'aire d'une surface courbe? Lorsqu'on nous dit que la circonférence qui a pour rayon un mètre est comprise entre six mètres 285 millimètres et six mètres 284 millimètres, quel est le sens de cette expression? Qu'on essaie par le procédé mécanique de vérifier la chose. Qu'on porte le mètre sur la circonférence. Il ne s'y pliera pas. Le décimètre? Non plus, pas plus que le centimètre ni le millimètre, etc.

Comment donc peut-on comprendre que la circonférence soit renfermée entre 6^m, 283 et 6^m, 284 ? C'est qu'on *remplace* la circonférence par un polygone d'un nombre infiniment grand de côtés qui sont des *lignes droites* infiniment petites, et qui, par conséquent, peuvent être mesurés au moyen du mètre.

De même, lorsqu'on trouve l'expression d'une surface courbe en mètres carrés, la vérification et par suite l'intelligence du fait seraient tout aussi impossibles si l'on ne *remplaçait* pas cette surface par une surface polyédrale d'un nombre infiniment grand de faces qui sont des *plans* infiniment petits et qui, par conséquent, peuvent être mesurées au moyen du mètre carré.

On voit donc que l'idée même de mesurer une ligne courbe ou une surface courbe est une idée infinitésimale. L'infiniment petit n'est pas ici un moyen de démonstration, c'est une condition *sine quâ non* de la compréhensibilité du fait à démontrer.

Or, lorsque la question posée renferme l'infiniment petit, est-il étonnant que la réponse n'en soit pas dégagée ?

Mais dès lors, me dira-t-on, il est prouvé que vous ne pouvez faire la géométrie sans infiniment petits ? Nullement, mais il y a autre chose qui est prouvé, c'est que vous avez introduit dans la géométrie élémentaire *quatre* propositions qui ne lui appartiennent pas (1). Ce sont :

La mesure de la longueur de la circonférence (2).

La surface convexe du cylindre.

La surface convexe du cône.

Et la surface de la sphère.

Otez ces quatre propositions *qui, ne se reliant pas au reste, lais-*

(1) Pas plus de quatre. On voit que je n'ai pas l'intention de faire un crible général et de réduire la géométrie élémentaire à néant. Je ne voudrais qu'envoyer ailleurs, en note si l'on veut, quatre propositions qui ne sont pas à leur place dans le cours.

(2) Je n'ai pas besoin de faire remarquer au lecteur que je puis obtenir l'aire du cercle d'une manière tout à fait indépendante de la longueur de la circonférence ; car sans cela, on m'accuserait de faire disparaître aussi l'aire du cercle de la géométrie élémentaire, ce qui n'entre pas du tout dans mes intentions. Même observation pour les corps ronds.

sent subsister tout le reste, et vous aurez ainsi une géométrie élémentaire, qui sera la véritable géométrie élémentaire, et dans laquelle il n'y aura plus une seule considération d'infini. Comme il ne m'appartient pas de réformer le cadre de l'enseignement, je ne puis pas dire que dans toute ma géométrie il n'y a pas de considération d'infini, mais ce que je puis dire, c'est qu'il n'y en a qu'une seule, et que c'est celle que vous y avez volontairement introduite (1).

4° La quatrième méthode est celle de la notion première de similitude. Cette méthode est peu connue, et je vais lui donner quelques développements. Elle a été adoptée par Carnot qui la résume en ces termes : « La théorie des parallèles tient à une notion première qui me paraît être à peu près du même ordre de clarté que celle de l'égalité parfaite ou de la superposition ; c'est la notion de similitude. Il me semble qu'on peut regarder comme un principe de la première évidence que ce qui existe en grand, comme une boule, une maison, un dessin, peut être fait en petit et réciproquement. Quelque figure qu'on veuille donc imaginer, il est possible d'en imaginer d'autres, de toute grandeur et semblables à la première, c'est-à-dire dont toutes les dimensions aient entre elles les mêmes proportions que celles de la première. Cette notion une fois admise, il est facile d'établir la théorie des parallèles sans recourir à la notion de l'infini. »

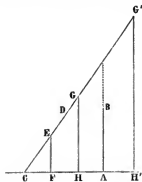
Quoiqu'il semble au premier abord que ce serait là un singulier axiome à admettre dans la géométrie élémentaire, cette idée mérite d'être discutée avec soin. Si elle était maintenue comme Carnot l'énonce, elle constituerait une idée trop complexe pour en faire un axiome, mais elle est remarquable surtout par les simplifications dont elle est susceptible. M. Noël, dans son traité de géométrie, a donné à cette proposition une forme beaucoup plus simple, moins générale et moins abstraite, et qui, si elle était admise, pourrait servir à démontrer immédiatement la théorie des parallèles. La voici : « Soient a, b, c, d , quatre grandeurs de même espèce deux à deux, telles que b s'obtienne au moyen de a , et d au moyen de c absolument d'après le

(1) Je ferai précéder d'un astérisque toutes les propositions qui peuvent être sautées par celui qui ne veut point introduire l'infini en géométrie. Le reste formera un corps complet, indépendant de ces propositions.

même procédé général, je dis que ces quatre grandeurs sont proportionnelles et que $a : b :: c : d$.

D'abord, il y aurait beaucoup à dire sur ce principe si les quatre quantités n'étaient que de même espèce deux à deux, comme le dit l'auteur, et non de même espèce toutes les quatre. Mais comme ce dernier cas suffit pour le point dont je m'occupe, j'entendrai le principe dans ce sens. Seulement, après l'avoir posé, M. Noël en déduit la démonstration du postulat d'Euclide par une marche bien peu convaincante et qui laisse subsister la difficulté. Cependant, ce principe suffit à la démonstration complète de la théorie des parallèles, comme je vais le faire voir.

Je dis qu'une perpendiculaire AB et une oblique CD à une même droite AC doivent se rencontrer. Pour le prouver, d'un point quel-



conque E, pris sur CD, abaissons sur CA la perpendiculaire EF. Portons $EG = EC$, et abaissons aussi la perpendiculaire GH.

Remarquons maintenant que CH s'obtient au moyen de CG identiquement comme CF au moyen de CE, donc, en vertu du principe précédent, on a la proportion $CH : CG :: CF : CE$; mais CG est double de CE, donc CH est double de CF. Continuant cette construction, il est clair

qu'on finira par arriver à une base CH' plus grande que CA, H' étant encore le pied d'une perpendiculaire $G'H'$, abaissée d'un point G' de CG. Dès lors, la perpendiculaire AB, pour sortir du triangle $G'H'C$, devra évidemment rencontrer l'oblique CD. Voilà, ce me semble, comment la proposition fondamentale doit être démontrée lorsqu'on admet la proportionnalité posée ci-dessus. Mais le principe lui-même est-il de nature à être considéré comme un axiome? Je ne le erois pas. D'ailleurs, M. Noël prétend démontrer son principe fondamental; mais, comme on le pense bien, les raisonnements sur lesquels il s'appuie reviennent à admettre l'objet en question, ce qui n'empêche pas l'auteur d'affirmer que son principe est démontré d'une manière complète et rigoureuse.

J'avais essayé de perfectionner ce système de Carnot, développé et

simplifié par M. Noël, mais je n'ai pas réussi dans cette voie.

5° Enfin, la cinquième méthode consiste, comme la troisième, à démontrer directement que la somme des trois angles d'un triangle vaut 2° , mais sans se servir de l'infiniment petit, comme on le fait dans la troisième méthode. Le moyen employé consiste à trouver à la somme cherchée une limite supérieure et une limite inférieure. Legendre, car c'est encore à lui qu'est due l'idée de cette méthode, détermine immédiatement une limite supérieure en prouvant rigoureusement que la somme des trois angles d'un triangle ne peut dépasser 2° . Puis il veut, abordant la difficulté de front, démontrer aussi que cette somme ne peut rester inférieure à 2° , mais il est forcé, dans le courant de cette dernière démonstration, d'admettre un postulatum et il ne s'en défend pas. Seulement, dans une édition subséquente, voulant démontrer son postulatum, il retombe sur les infiniment grands.

Malgré cela, Legendre a fait faire par cette théorie un grand pas à la question, et s'il se heurte encore contre une proposition non démontrée, cette proposition est du moins d'une autre nature et plus saisissable que celle d'Euclide.

C'est en ce point que j'ai repris le problème.

Mais avant de parler de la solution que je présente aujourd'hui, qu'il me soit permis de dire quelques mots d'un essai antérieur.

J'avais cherché à établir que dans un triangle isocèle rectangle la somme des trois angles doit valoir 2° , et j'en avais déduit rigoureusement qu'il doit en être de même dans tout autre triangle. La première partie, que je n'admets pas moi-même, reposait sur une considération assez singulière, dont je parle dans la note II, à propos de la proposition XIX de Legendre. La seconde, au contraire, était parfaitement rigoureuse; mais, lorsque je l'ai trouvée, j'ignorais encore que Legendre avait démontré ce théorème plus général : « Si dans un certain triangle la somme des trois angles vaut 2° , il en sera de même dans tout autre triangle. »

Je donnerai la seconde partie de ma démonstration dans la note IV, mais, pour le motif que je viens d'énoncer, j'avertis le lecteur qu'il ne doit regarder le contenu de cette note que comme un exercice géométrique, sans utilité réelle.

Enfin, après avoir étudié et approfondi la démonstration de Legendre et le postulat qu'elle laisse subsister, je suis resté convaincu que le nœud de la difficulté consiste dans cette idée de la limite inférieure, que l'on cherche presque au hasard et sans avoir sur elle aucune idée précise. Prenant alors la question à rebours, j'ai démontré rigoureusement que si l'on parvenait à trouver pour la somme des trois angles une limite inférieure, fût-elle $\frac{1}{50}$ d'angle droit, il en résulterait immédiatement que cette somme est exactement deux angles droits. La difficulté consistait donc à déterminer cette limite inférieure et plusieurs essais infructueux me l'avaient fait croire insurmontable, lorsque je suis parvenu à l'éviter par un tour de démonstration.

Je ferai remarquer à ce sujet qu'il y avait trois opinions en présence sur la question de savoir à quoi tient la difficulté que l'on rencontre dans la théorie des parallèles.

La première, fort ancienne, et défendue, comme je l'ai dit, par M. Noël, consiste à prétendre que cela tient à l'essence des quantités angulaires.

La seconde est celle de Carnot, qui attribue la difficulté à la non admission de la notion de similitude, notion évidente pour nous, selon lui, et dont nous pourrions nous servir pour établir les vérités géométriques.

Je crois avoir, dans ce qui précède, suffisamment développé ces deux opinions, ainsi que les motifs pour lesquels je ne puis admettre ni l'une ni l'autre.

La troisième est celle de Legendre, et, de même que toutes les productions de cet auteur, elle mérite un examen approfondi.

Legendre résume la difficulté en disant qu'il faudrait « déduire de la définition de la ligne droite, une propriété caractéristique de cette ligne, qui exclût toute ressemblance avec la forme d'une hyperbole comprise entre ses asymptotes. »

Plus on examine cette opinion, plus on la trouve rationnelle et profonde.

Mais cette absence d'indications sur la forme de la ligne droite, qui fait tomber, comme Legendre l'avoue, la démonstration donnée dans

les éditions III à VIII, me semble faire tomber en même temps la proposition XIX actuelle. Cette proposition, selon moi, prouve fort bien que la somme des trois angles d'un triangle ne peut dépasser 2° , mais nullement qu'elle doit atteindre cette valeur. Je prie le lecteur de consulter la note II avant de se prononcer.

Quoi qu'il en soit, Legendre n'étant parvenu à trouver cette propriété caractéristique qu'en retombant sur les infiniment grands, comme j'ai eu déjà l'occasion de le dire, son idée n'est que brillante, sans être utile à la suite des recherches.

S'il m'était permis, après tant de mathématiciens éminents, d'émettre une opinion sur les causes des difficultés que cette question suscite aux géomètres, je dirais que, pour démontrer que la somme des trois angles vaut 2° , la difficulté ne consistait qu'à déterminer la limite inférieure de cette somme et que l'on a toujours cherché cette limite inférieure sans être convaincu de son existence, ou du moins, sans faire entrer cette conviction en ligne de compte dans les raisonnements que l'on faisait pour arriver au but.

L'on verra dans le texte comment, partant de cette idée, je suis arrivé à un nouveau système de démonstration, que je présente aujourd'hui.

Je sais que l'on court le risque de s'égarer en se constituant le juge de ses propres œuvres ; mais, pour ma part, je dois dire que ma démonstration me convainc plus que toutes celles qui ont été données jusqu'à ce jour.

On comprendra que je n'insiste pas sur ce sujet. J'ai étudié consciencieusement la matière ; je présente ma méthode : les hommes compétents la jugeront.

c. J'ai ajouté au premier livre de ce cours quelques propositions qui sont ordinairement passées sous silence, telles que celles-ci : par un point donné sur une droite ou hors d'une droite, on peut toujours lui mener une perpendiculaire ; en un point d'une droite on peut faire un angle égal à un angle donné ; on peut toujours partager une droite en deux parties égales ; on peut toujours diviser un angle en deux parties égales ; par un point extérieur à une droite, on peut mener une seconde droite qui forme avec la première un angle donné. En voici le motif : ces propositions sont ordinairement considérées

comme évidentes, mais en les considérant ainsi, on fait implicitement un raisonnement infinitésimal, et il convient de ne pas même laisser à mes contradicteurs un semblable argument.

Enfin, certains auteurs modernes ont écrit que la géométrie élémentaire voit trop par les yeux et pas assez par la raison, et se sont demandé s'il ne serait pas utile de dire, au moins une fois, à l'élève pourquoi deux droites qui se rencontrent se coupent, c'est-à-dire se traversent; pourquoi dans un triangle il ne peut y avoir d'angle rentrant, etc.

Quoique je n'y attache pas grande importance, j'ai satisfait au désir qu'ils expriment.

d. L'idée de mesure, comme elle est présentée dans la Géométrie de Legendre, quoique exacte, est vague et ne satisfait pas l'esprit. L'élève ne se fait pas une idée nette de cette mesure, qui lui est donnée comme toute conventionnelle et n'ayant rien de positif. Je modifierai cette idée qui se répète six fois comme résultant de proportionnalités, savoir :

Dans la mesure de l'angle au centre.

- » l'aire du rectangle.
- » la mesure du coin.
- » le volume du parallépipède rectangle.
- » la mesure de l'angle sphérique.
- » des fuseaux, onglets, etc.

et d'où résultent ensuite les mesures des autres angles et des autres aires et volumes.

Ainsi, pour le rectangle, par exemple, je démontrerai directement que le nombre abstrait exprimant le nombre d'unités carrées (de mètres carrés, si l'on veut) contenues dans son aire, est égal au produit des deux nombres abstraits exprimant les deux nombres d'unités linéaires (ou de mètres) contenues dans ses deux côtés. Je ferai de même dans tous les autres cas semblables.

e. Toutes les démonstrations relatives à l'aire du cercle et aux surfaces et volumes des corps ronds, reposent, dans Legendre, je ne dirai pas sur un cercle vicieux, mais tout au moins sur une considération infinitésimale.

Ainsi, lorsqu'il veut prouver que la surface d'un cercle vaut le

produit de sa circonférence par la moitié de son rayon, il nous dit : si eirc. $OA \times \frac{OA}{2}$ n'est pas la mesure du cercle OA , ce sera la mesure d'un cercle plus grand ou plus petit. Mais il admet donc, à *priori*, qu'il existe toujours un cercle ayant une aire donnée d'avance, et ce défaut se reproduit dans toutes les démonstrations relatives aux corps ronds ; il importait d'en débarrasser la géométrie. J'y suis parvenu par un simple renversement des démonstrations, et quelques modifications accessoires, sauf dans deux cas rebelles, qui sont l'aire du cercle et la surface convexe du cône. Je présente pour ces deux cas deux démonstrations nouvelles.

Celle relative au cône pourrait, au premier abord, donner lieu à une objection ; afin de ne pas obscurcir le texte, je discute et je réfute cette objection dans la note VI.

Mais, lorsque toutes ces modifications ont été apportées aux démonstrations de Legendre, il reste encore tout au moins à admettre que l'on peut toujours tracer une ligne droite s'exprimant en unités de longueur, par un nombre abstrait donné d'avance, commensurable ou non. C'est là un inconvénient grave, et je l'ai fait disparaître complètement. J'ai répété à chaque démonstration l'artifice que j'emploie dans ce but, au risque de fatiguer le lecteur. Je ne le regretterai pas, si, à force de le relire, le lecteur se convainc de sa nécessité, et de la rigueur qu'il apporte dans les démonstrations où je l'emploie.

f. Les propositions VIII et IX de l'appendice au livre IV de Legendre sont une tache dans la théorie des maximums et des minimums. Elles vont à l'encontre de toute méthode géométrique, puisque pour démontrer qu'un polygone est plus grand qu'un autre, Legendre emploie des proportions entre lignes courbes d'espèces différentes. Il s'ensuit donc que celui qui exclurait de la géométrie élémentaire, ou n'accepterait que sous réserve, la comparaison entre les grandeurs d'espèce différente, serait obligé de douter aussi que, de deux polygones réguliers isopérimètres, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus grand. C'est là une anomalie géométrique que je fais disparaître par une théorie nouvelle et rigoureuse et qui, si elle est un peu plus longue et plus détournée, a l'avantage de ne se servir d'aucune considération étrangère à l'objet en question.

g. Pour arriver à la mesure des surfaces courbes, Legendre s'appuie sur quatre lemmes fondamentaux, parmi lesquels il en existe deux, à savoir le lemme n° 1 et la proposition III, dont les démonstrations équivalent à admettre l'objet à démontrer.

D'ailleurs toute la théorie, reposant sur le lemme n° 1, cesse d'être rigoureusement établie.

J'ai fait disparaître cette imperfection, en présentant pour tous les lemmes préliminaires des démonstrations rigoureuses et en démontrant la proposition III dans le texte, comme elle l'est dans la note XI de Legendre.

Cette théorie est ainsi mise à l'abri de tout reproche.

h. La démonstration du lemme sur lequel Legendre s'appuie pour démontrer que deux circonférences sont entre elles comme leurs rayons, quoique pouvant être rendue tout à fait inattaquable par un très-léger échange, devient inutile en présence des idées émises dans le paragraphe b, et est modifiée dans le sens de ce paragraphe.

Dans la démonstration du fait lui-même que deux circonférences sont entre elles comme leurs rayons, Legendre tombe dans l'écueil signalé au paragraphe e; j'ai redressé ce défaut comme pour les autres propositions mentionnées dans le même paragraphe.

i. La recherche du plus court chemin entre deux points sur la sphère a été rendue rigoureuse par l'introduction dans le courant de la démonstration du second lemme de M. Blanchet qui n'est qu'un développement indispensable de la démonstration de Legendre.

k. Je définis la quantité π d'une manière précise et rationnelle. J'indique dans le texte, pour sa recherche, la première méthode de Legendre. C'est, du moins pour les commençants, la meilleure à plusieurs points de vue. Mais, dans la note VII, je présente une discussion générale de toutes les méthodes géométriques usitées, ainsi que d'une méthode analytique fort simple. J'y fais voir leurs avantages et leurs inconvénients. J'y ajoute pour les formules des polygones isopérimètres une démonstration analytique que j'avais trouvée avant d'en connaître les démonstrations géométriques qui sont données par plusieurs auteurs.

l. J'ai donné pour les coins et les angles sphériques des définitions analogues à celle des angles plans et j'en ai déduit rigoureusement

leur mesure, tandis que, dans Legendre, la mesure du coin semble déjà toute conventionnelle, et celle de l'angle sphérique est présentée comme définition.

m. J'ai modifié les propositions XXIV et XXV du V^{me} livre de Legendre, qui ne sont que des vérifications arides. J'y ai ajouté un problème XXVI dont je fais usage au livre VII.

n. J'ai présenté, dans l'appendice aux livres VI et VII, une méthode pour inscrire et circonscrire un polyèdre régulier quelconque à une sphère donnée.

Il est assez remarquable que les auteurs de géométrie résolvent, pour la plupart, le problème inverse, et ne songent pas à celui-ci, qui est au moins aussi intéressant.

Telles sont les principales modifications que j'ai apportées aux éléments de la géométrie; quant aux modifications de détail, elles sont nombreuses, et je ne saurais les indiquer ici. J'espère que toutes seront favorablement accueillies par les hommes compétents, au double point de vue de la rigueur et de la méthode.

Après m'être tracé le plan que je viens d'exposer, il me restait à déterminer la forme sous laquelle je présenterais mon travail.

J'avais songé d'abord à ne publier que ce qui m'appartient; mais alors l'ouvrage, ne formant pas un cours complet, n'eût pu être utile à un commençant et n'eût pu être lu que par celui qui sait déjà. J'aurais donc manqué l'un des buts que doit se proposer tout auteur d'ouvrage élémentaire.

En second lieu, j'avais cru présenter un cours complet, en me bornant à transcrire les parties que je ne modifierais pas. Mais ce système m'eût attiré (sans raison, il est vrai), le reproche de compilation que je veux à tout prix éviter.

J'ai donc adopté un moyen terme : je suppose que le lecteur ait en mains la Géométrie de Legendre; je suis le même plan, la même division. Je n'expose que les propositions que je modifie, et je renvoie à Legendre pour les autres, avec indication des numéros. A cet effet, je préviens que les chiffres romains indiquent les propositions de mon cours, et les chiffres arabes les propositions correspondantes de Legendre.

Il me reste à donner au lecteur un dernier renseignement. Sans

doute, en publiant ce livre, mon but n'a pas été de présenter un mélange de théories éparses, recueillies dans les divers auteurs; sans doute, mon but, hautement avoué, a été de produire mes idées et de les faire prévaloir, s'il est possible. Mais l'on eût pu m'accuser de présomption et d'ignorance si j'avais lancé un travail de ce genre sans m'enquérir de ce qui a été écrit jusqu'ici, sans consulter les auteurs existants, soit pour vérifier si mes méthodes sont bien nouvelles, soit pour profiter des perfectionnements qu'eux-mêmes pourraient avoir introduits. Je me crois en règle sous ce rapport, puisque mon travail n'a été rédigé qu'après une lecture attentive et consciencieuse de tous les ouvrages de géométrie que j'ai pu me procurer. Je ne citerai que les principaux. Ce sont *Legendre*, *Gauss* (1), *Lacroix*, *Bertrand*, *Gergonne* (2), *Vincent*, *Blanchet*, *Mutel*, *La Frémoire*, *Liagre*, *Lamarle* (3), *Garnier*, *Catalan*, *Noël*, *Ueberweg*, *Carnot* (4), *Wezel*, *Annoot*, *Finck*, *Clairaut*, *Bezout*, *Jacob De Gelder*, *Moreau*, *Casterman*, *Sonnet*, *Aniot*, *Prouhet*, *Briot*, *Cirrodde*.

Bruxelles, le 15 avril 1860.

JOSEPH DE TILLY.

OBSERVATION. — Quoique le texte soit complet par lui-même, les motifs de certaines modifications ne pourront être nettement appréciés qu'après une lecture attentive de la préface.

(1) *Disquisitiones*, etc., traduction de M. Pouillet-Delisle.

(2) *Annales de Mathématiques*.

(3) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*.

(4) *Géométrie de position et De la corrélation des figures de géométrie*.

LIVRE PREMIER.

LES PRINCIPES.

DÉFINITIONS.

La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

Une portion de l'étendue s'appelle *corps* (1).

La limite d'un corps s'appelle *surface*.

La limite d'une surface s'appelle *ligne*.

L'extrémité d'une ligne s'appelle *point*.

Parmi toutes les lignes que l'on peut imaginer, il existe un système de lignes indéfinies, qui jouissent de cette propriété, que si l'on place deux points quelconques de l'une sur deux points quelconques de l'autre, les portions comprises entre ces deux points coïncident par cela seul. Ce sont ces lignes que j'appelle *lignes droites*.

Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites s'appelle *ligne courbe*.

Le *plan* est une surface dans laquelle, prenant deux points à volonté, et joignant ces deux points par une ligne droite, cette ligne est tout entière dans la surface.

Toute surface qui n'est ni plane, ni composée de surfaces planes est une *surface courbe*.

(1) Cette définition est toute géométrique. — En physique, il faudrait de plus que cette portion fût impénétrable pour constituer un corps.

Pour les autres définitions, voyez Legendre, définitions IX à XX.
Explication des termes et des signes, voyez Legendre.
Axiomes, voyez Legendre, mais supprimez l'axiome IV.

PROPOSITION 1^{re}.

THÉORÈME.

Les angles droits sont tous égaux entre eux (1).

Soit la ligne CD perpendiculaire à AB, et GH à EF; je dis que les angles ACD, EGH seront égaux entre eux.

Pour le prouver, prenez une ligne droite quelconque MN et posez le point N sur le point C, puis le point M sur un autre point de AB, que j'appellerai A. Les deux lignes droites AC et MN ayant deux points communs coïncideront entre ces deux points (par définition), ainsi MN tombera sur AC. Faisons la même chose à droite de C, puis des deux côtés du point G, de manière à obtenir les points B, E, F. Portons maintenant le point E sur le point A, puis amenons le point F sur un point de AB. La partie comprise entre E et F tombera donc dans la



M ——— N



direction AB; mais si G ne tombait pas en C, E tombant en A, les parties AC et EG seraient mani-

festement inégales, tandis qu'elles sont identiques par construction; donc G tombe sur C. Pour la même raison, GF ne pouvant différer de CB, F tombe sur B. On voit donc que EF recouvre exactement AB, et que de plus G tombe sur C.

Dès lors, si GH ne coïncidait pas avec CD, supposons que cette droite tombe sur CK différente de CD. Mais alors on aurait séparément $ACD = DCB$, et $ACK = KCB$. Or, ces égalités sont contradictoires, car ACK est plus grand que ACD, et KCB est moindre que DCB, donc il est absurde de supposer que GH tombe sur CK, différente de CD,

(1) La démonstration qui suit n'est pas différente de celle de Legendre, mais elle est plus détaillée. Celle de Legendre sous-entend plusieurs idées, et si l'esprit n'y suppléait pas immédiatement, on pourrait douter de l'exactitude de la proposition.

donc GH tombe sur CD, donc tous les angles droits sont égaux.

II. — 2.

Remarque. C'est ici le lieu de faire observer qu'un triangle ne peut avoir d'angle rentrant ou plus grand que 2° , car la somme des angles adjacents d'un même côté d'une droite devant valoir 2° , les prolongements des côtés formant l'angle rentrant passeraient dans l'intérieur du triangle et dès lors ils devraient rencontrer de nouveau le troisième côté, ce qui est contraire à la définition de la ligne droite.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident l'une avec l'autre dans toute leur étendue, et ne forment qu'une seule et même ligne droite.

Soient les deux points communs A et B; d'abord les deux lignes n'en doivent faire qu'une entre A et B par définition.

Supposons ensuite que ces lignes étant prolongées, elles commencent à se séparer au point C, l'une devenant CD, l'autre CE. Menons au point C la ligne quelconque CF. Puisque la ligne ACD est droite, on aura (proposition II) $ACF + FCD = 2^\circ$; puisque la ligne ACE est droite, on aura aussi $ACF + FCE = 2^\circ$, donc (proposition I), $ACF + FCE = ACF + FCD$, ou $FCE = FCD$. On aurait donc la partie égale au tout, ce qui est absurde. Donc, il est absurde de supposer que la ligne droite AB puisse se bifurquer en C; donc, etc.

IV. — 4.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Toutes les fois que deux lignes droites AB, DE se rencontrent, elles se coupent, et les angles opposés au sommet sont égaux.

D'abord, lorsque deux droites se rencontrent elles se coupent, car

si elles ne se traversaient pas, comme DCE et ACF, par exemple, en menant la droite quelconque CG, on aurait $ACG + GCF = 2^\circ$, $DCG + GCE = 2^\circ$, donc la partie égale au tout, ce qui est absurde.

Quant à la seconde partie de la proposition, DCE étant droite, on a $DCA + ACE = 2^\circ$; ACB étant droite, on a aussi $ACE + ECB = 2^\circ$, donc $DCA + ACE = ACE + ECB$, ou $DCA = ECB$.

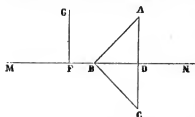
VI-VII. — 6-7.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Par un point pris hors d'une droite ou sur une droite, on peut toujours mener une perpendiculaire à cette droite.

Soit d'abord un point A, pris hors de la droite MN. Par ce point, menons la droite quelconque AB, puis faisons au dessous de MN,



l'angle $NBC = NBA$, ce qui peut s'effectuer par superposition. Portons $BC = AB$, et joignons AC. Nommons D le point où cette droite coupe MN. Je dis que AD est perpendiculaire à MN. En effet, les triangles ABD, BDC,

ayant par construction deux côtés égaux ainsi que l'angle compris, sont égaux dans toutes leurs parties (proposition VI), donc l'angle $ADB = CDB$, donc ADC est perpendiculaire à MN, par définition. Si le point donné était pris sur MN, comme F par exemple, il suffirait de refaire la construction précédente, puis de reporter l'angle droit NDA en NFG, par superposition. Donc enfin, par un point pris hors d'une droite ou sur une droite, on peut toujours lui mener une perpendiculaire.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

On peut toujours diviser un angle donné en deux parties égales.

Soit donné l'angle A. Portons sur ses côtés les longueurs $AB=AD$, $AC=AE$. Joignons BE, CD qui se coupent en O, joignons encore AO, et je dis que l'on aura $CAO=OAE$. En effet, les triangles ADC, ABE ont un angle commun en A, compris entre deux côtés égaux par construction. Ces deux triangles sont donc égaux (proposition VI). Donc, l'angle en C est égal à l'angle en E, et l'angle $ADC=ABE$, ou en prenant les suppléments, $ODE=OBC$; d'ailleurs, les droites DE, BC, étant les différences de droites égales, sont égales, donc les triangles ODE, OBC, ont un côté égal $DE=BC$, adjacent à deux angles égaux, donc ils sont égaux (proposition VII), et par suite $CO=EO$. Dès lors, les deux triangles COA, EOA, ayant un angle égal $C=E$, compris entre côtés égaux, sont égaux (proposition VI), donc les deux angles en A sont égaux, donc on peut diviser tout angle donné en deux parties parfaitement égales.

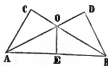
Remarque. La ligne AO qui partage l'angle CAE en deux parties égales, se nomme la *bissectrice* de cet angle.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

On peut toujours diviser une droite donnée en deux parties égales.

Soit AB la droite donnée. En A et en B faisons les angles égaux BAC, ABD, portons $AC=BD$, joignons AD, BC qui se coupent en O. Menons la bissectrice OE de l'angle AOB, ce qui est toujours possible (proposition IX). Je dis que le point E ainsi obtenu sera le milieu de AB. En effet, les triangles ACB, ADB, ayant les angles $A=B$, compris entre côtés égaux, sont égaux (proposition VI), donc l'angle $C=D$, et de plus l'angle



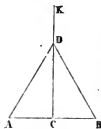
$DAB = CBA$, ou en retranchant des angles égaux A et B , $CAO = DBO$. Donc, les deux triangles CAO , DOB , ont un côté égal $CA = DB$, adjacent à deux angles égaux, donc ils sont égaux (proposition VII), donc $AO = OB$. Dès lors, les triangles AOE , BOE , ont un angle égal en O , compris entre côtés égaux, donc ils sont égaux, donc $AE = EB$, donc on peut toujours diviser une droite donnée en deux parties égales.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Sur une droite donnée, on peut toujours tracer un triangle équilatéral.

Soit la droite AB ; prenons son milieu C (proposition X) et en ce point menons la perpendiculaire CK (proposition VIII). Faisons tourner la droite AB autour du point A dans le plan du papier. Le point B devra nécessairement traverser quelque part la perpendiculaire indéfinie CK . Supposons que ce soit en D . On a donc $AB = AD$. Enfin joignons DB . Les triangles ACD , DCB , ayant les angles égaux en C compris entre côtés égaux, sont égaux, donc $AD = BD$. Donc, $AB = AD = BD$. Donc, sur toute droite donnée AB , on peut tracer un triangle équilatéral ABD .



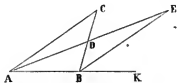
PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Dans un triangle, tout angle extérieur est plus grand que l'un quelconque des deux angles intérieurs non adjacents.

Soit donné le triangle ABC . Je dis par exemple, que l'angle extérieur CBK est plus grand que l'angle intérieur non adjacent ACB . Pour le prouver, prenons le milieu D de CB (proposition X), et joignons AD que nous prolongeons de $DE = AD$. Joignons BE .

Les triangles ADC , BDE , ayant les angles égaux en D (proposition V), compris entre côtés égaux sont égaux.



Done, l'angle $ACB = CBE$, mais CBK est plus grand que CBE , donc il est aussi plus grand que l'angle égal ACB .

Corollaires. I. La somme de deux angles quelconques d'un triangle est toujours moindre que deux angles droits. C'est ce que l'on voit en reprenant l'inégalité précédente et en ajoutant de part et d'autre l'angle intérieur adjacent à l'angle extérieur que l'on a considéré. Il s'ensuit qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit ou obtus.

II. Par un point hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite.

III. Deux perpendiculaires à une même droite ne peuvent se rencontrer et sont par conséquent parallèles (par définition). Cette propriété et la précédente pouvaient être démontrées directement.

IV. Deux droites formant avec une sécante deux angles intérieurs dont la somme vaut deux angles droits, sont aussi parallèles.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

Soit $AB = AC$. Divisons l'angle A en deux parties égales (proposition IX) par la bissectrice AD . Les triangles BAD , DAC , ayant les angles égaux en A , compris entre côtés égaux, sont égaux, donc $B = C$.



Corollaire. Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux.

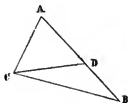
Scholie. La droite AD est à la fois bissectrice, perpendiculaire et médiane. On appelle de ce dernier nom la droite qui joint le sommet d'un triangle au milieu du côté opposé.

XIV. — 13.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Si, dans un triangle, un côté est plus grand qu'un autre, l'angle opposé au premier sera plus grand que l'angle opposé au second.



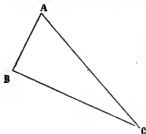
Soit $AB > AC$. Je dis que l'on aura $\angle ACB > \angle CBA$.

Portons $AD = AC$, et joignons CD . En vertu de la proposition XIII, on aura $\angle ACD = \angle ADC$, mais $\angle ADC > \angle CBA$ (proposition XII), donc, $\angle ACD > \angle CBA$, mais $\angle ACB > \angle ACD$, donc à fortiori $\angle ACB > \angle CBA$.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Si, dans un triangle, un angle est plus grand qu'un autre, le côté opposé au premier sera plus grand que le côté opposé au second.



Soit $B > C$, je dis que l'on aura $AC > AB$.

En effet, si l'on avait $AC < AB$, on aurait aussi, en vertu du théorème précédent, $B < C$, et si l'on avait $AC = AB$, on aurait (proposition XIII) $B = C$. Donc, AC ne peut être, ni égal à AB , ni plus petit, donc $AC > AB$.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

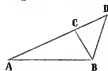
La ligne droite est la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre (1).

Soit AB une ligne droite. Imaginons un autre contour entre A et B .

(1) Une marche analogue a été suivie par M. Wezel; mais, outre que cet auteur part d'une définition que je n'admets pas, tout l'ensemble de sa théorie repose sur une construction dont il omet de montrer la possibilité.

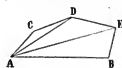
Il peut se présenter trois cas : ou bien ce contour sera composé de deux lignes droites, ou il se composera d'un plus grand nombre de lignes droites, ou enfin il sera courbe en totalité ou en partie.

Premier cas. Il faut démontrer que $AB < AC + BC$. Pour cela, prolongeons AC de $CD = CB$, et joignons DB .



L'angle $DBC = D$ (proposition XIII), mais $DBC < ABD$, donc $D < ABD$, donc (proposition XVI), $AB < AD$; mais puisque $CD = CB$, on a $AD = AC + CB$, donc $AB < AC + CB$.

Deuxième cas. Il faut démontrer que $AB < AC + CD + DE + EB$. Or, par le premier cas, $AB < AE + EB$, mais aussi $AE < AD + DE$, donc



$AB < AD + DE + EB$, enfin $AD < AC + CD$, donc $AB < AC + CD + DE + EB$, et cette démonstration s'applique évidemment, quel que soit le nombre de lignes droites constituant

le contour polygonal de A en B.

* *Troisième cas.* S'il s'agit de comparer AB à un contour curviligne, cette comparaison n'est intelligible qu'à la condition que l'on remplace ce contour curviligne par un polygone d'un nombre infini de lignes droites infiniment petites, et, par suite, on retombe dans le cas précédent.

XVIII-XX. — 9-11.

XXI-XXIII. — 16-18.

PROPOSITION XXIV.

NOTATION ABBRÉVIATIVE.

Supposons construits tous les triangles équilatéraux possibles. Parmi tous ces triangles, il en existera un qui aura la plus petite somme d'angles (ce qui n'exclut nullement le cas où plusieurs triangles auraient une somme d'angles minimum, pas plus que celui où la somme serait partout la même). Cette somme, la plus petite, je l'appellerai M dans la suite du raisonnement, de manière qu'il n'existera évidemment pas de triangle équilatéral dans lequel la somme des angles puisse être moindre que M .

Corollaire. Deux droites, AD , BE , formant avec une sécante AB

deux angles moindres que $\frac{M}{5}$ doivent se rencontrer. En effet, sur AB



construisons un triangle équilatéral ABC. La somme de ses angles valant au moins M, et les trois étant égaux, chacun de ses angles vaut au moins $\frac{M}{3}$. Dès lors, AD, renfermée dans l'angle

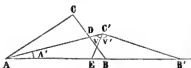
CAB, pour sortir du triangle ABC, devra rencontrer BC en D, et BE, pour sortir du triangle ABD, rencontrera AD.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

Dans un triangle, la somme des trois angles ne peut dépasser deux angles droits.

En effet, supposons que la somme des angles du triangle ABC puisse être supérieure à 2° , et appelons-la $2+x$.



Plaçons le triangle de telle sorte que son plus grand côté soit en bas, et le plus petit à droite (ce qui n'exclut pas le cas où il aurait des côtés égaux).

Prenons le milieu D de BC, et joignons AD. Je dis d'abord que AD est plus petit que AB. En effet, du point A, imaginons une perpendiculaire sur BC; si cette perpendiculaire tombe en D ou au-dessus de D, le fait est démontré. Or, elle ne saurait tomber en dessous, sans quoi on aurait (proposition XXI) $AC > AB$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc, $AD < AB$.

Si donc nous portons $AC' = AB$, le point C' tombera hors du triangle ABC, et si nous portons $AE = AD$, le point E tombera entre A et B.

Portons encore $EB' = AE = AD$, je dis que B' tombera à droite de B; en effet $AB < AD + DB$ (proposition XVII); mais, dans le triangle ADB, l'angle en B étant plus grand que l'angle en A (que nous nommerons A' dans la suite), on a $AD > DB$, donc, à fortiori, $AB < 2AD$. Donc, le point B' doit tomber à droite de B. Joignons C'B' et C'E. Les triangles

ADB, AC'E, ayant un angle commun compris entre deux côtés égaux par construction, sont égaux, donc $C'E=DB=CD$. De plus $B=V$ (1), et $ADB=C'EA$, ou, en prenant les suppléments, $ADC=C'EB'$. Cela posé, les triangles ADC, C'EB', ont les angles $D=E$, compris entre côtés égaux, donc ils sont égaux, donc $A=A'+B'$, ou $A=A'+B'$ (2), $C=V'$ (3), et $AC=B'C'$. Ajoutant les équations (1), (2), et (3), il vient $A+B+C=A'+B'+V+V'=A'+B'+C'$. Puisque $AC'=AB$, et $B'C'=AC$, on a $B'C'<AC'$, d'ailleurs $AC'<AB'$. On voit donc que le second triangle est posé comme le premier, et que, par suite, la construction peut se répéter.

En outre, puisque $AC'>C'B'$, on a $B'>A'$ (proposition XV), mais $A=A'+B'$ (2), donc $A>2A'$, ou $A'<\frac{A}{2}$.

Les trois relations dont nous nous servirons dans les raisonnements qui vont suivre sont celles-ci :

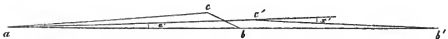
$$(a) A + B + C = A' + B' + C'$$

$$(b) A = A' + B'$$

$$(c) A' < \frac{A}{2}.$$

D'abord, puisque les angles $A, A', A'',$ etc., fournis par les constructions successives, décroissent plus rapidement que les termes de la progression $A, \frac{A}{2}, \frac{A}{4}$ etc., on finira nécessairement par obtenir un angle a plus petit que x .

Supposons que la construction soit arrivée à ce point, et que abc soit le triangle alors obtenu. On aura encore toujours $A+B+C=a+b+c$, et en même temps $a<x$. Construisons encore le triangle suivant $a'b'c'$, on aura $A+B+C=a'+b'+c'=a'+b'+2-x'=2+a'+b'-x'$.



Donc, $2+x=2+a'+b'-x'$, ou $x=a'+b'-x'$. Or, cette équation est absurde, car $x>a$, et $a=a'+b'$, donc $x>a'+b'$ et à fortiori $x>a'+b'-x'$. On voit donc que l'hypothèse que la somme des angles

du triangle ABC puisse être $2+x$ conduit à une conséquence absurde, donc elle est absurde elle-même, donc dans un triangle, la somme des trois angles ne peut dépasser 2° (1).

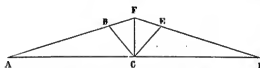
PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME.

Dans tout triangle, la somme des trois angles vaut au moins deux angles droits.

Il peut se présenter deux cas, suivant que le triangle donné renferme ou non un angle moindre que $\frac{M}{5}$.

Premier cas. Soit l'angle A du triangle ABC moindre que $\frac{M}{5}$. Je



dis que $A+B+C$ vaudra au moins 2° . En effet, si cela n'était

pas, on pourrait toujours représenter cette somme par $2-x$. Portons $CD = AC$, faisons $DCE = ACB$, prenons $CE = CB$, et joignons ED . Les deux triangles ABC, CED, sont égaux (proposition VI), donc $A = D$, et A étant moindre que $\frac{M}{5}$, D l'est aussi. Dès lors, AB et DE se rencontrent

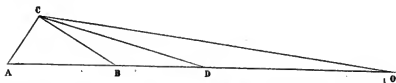
en F (proposition XXIV. Corollaire.) Joignons FC. Évaluons la somme des angles du triangle AFD. Cette somme se compose évidemment de celle des angles des triangles ABC, CED, BFC, FEC; diminuée des angles en B, C, E dont la somme vaut 6° .

Dans chacun des deux premiers triangles, la somme des angles vaut exactement $2-x$, dans chacun des deux derniers elle vaut tout au

(1) Plusieurs lecteurs seront frappés de l'analogie qui existe entre cette démonstration et la XIX^e de Legendre, et ils essaieront peut être d'appliquer le raisonnement mot pour mot à la seconde partie de la démonstration, auquel cas tout serait terminé, comme cela est en apparence dans Legendre. Il est superflu de prévenir ceux qui ont étudié cette théorie à fond qu'ils n'y parviendront pas. Mais il peut être bon d'en prévenir les autres, pour éviter un labeur inutile.

plus 2 (proposition XXV), donc, la somme totale pour ces quatre triangles est tout au plus $8-2x$, donc, la somme des angles du triangle AFD vaut tout au plus $2-2x$. Mais ce triangle a encore un angle moindre que $\frac{M}{3}$ (1), donc en répétant la construction, j'obtiendrai un triangle dans lequel la somme des angles sera tout au plus $2-4x$, etc., mais il est clair que dans cette expression, le premier terme reste constant, tandis que le second croît comme les termes de la progression $x, 2x, 4x$, etc., donc le second finira par surpasser le premier, ce qui est absurde. Donc, la somme des angles du triangle ABC ne peut être représentée par $2-x$, donc elle vaut au moins deux angles droits.

Second cas. Soit un triangle quelconque ABC. Portons $BD=BC$, et



joignons CD. La somme des angles du triangle CBD vaut tout au plus 2° (proposition XXV) et, comme la somme des angles en B vaut exactement 2° , celle des angles en C et en D vaut tout au plus B. Mais ces deux angles C et D sont égaux (proposition XIII), donc le double de D vaut tout au plus B, ou, en d'autres termes, D vaut tout au plus $\frac{B}{2}$. Si l'on répète la construction, l'angle à la base suivant vaudra tout au plus $\frac{D}{2}$, donc tout au plus $\frac{B}{4}$. Les angles à la base décroissant au moins aussi rapidement que les termes de la progression $B, \frac{B}{2}, \frac{B}{4}$, etc., on finira nécessairement par arriver à un angle moindre que $\frac{M}{3}$. Supposons que la construction soit arrivée à ce point et que l'on obtienne, par exemple, le triangle AOC dans

(1) Il en a même deux, mais il suffit, pour la construction, qu'il en ait un seul.

lequel O est moindre que $\frac{M}{5}$. Nommons pour un instant S , la somme des angles du triangle AOC . La somme des angles réunis des triangles ABC , BCO , sera exactement $S+2$, mais la somme des angles de BCO vaut tout au plus 2 (proposition XXV), donc celle du triangle ABC vaut au moins S , mais S vaut au moins 2° , d'après le premier cas, donc, la somme des angles du triangle ABC vaut aussi au moins 2° ; donc enfin, dans tout triangle, la somme des trois angles vaut au moins deux angles droits.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

Dans tout triangle, la somme des trois angles vaut exactement deux angles droits.

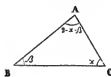
En effet, elle ne peut valoir plus, d'après la proposition XXV, ni moins, d'après la proposition XXVI, donc dans tout triangle, la somme des trois angles vaut exactement deux angles droits.

Voyez les corollaires de la proposition XIX de Legendre, sauf le troisième qui est déjà établi.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

Par un point hors d'une droite, on peut toujours mener une seconde droite qui forme avec la première un angle donné.



Soit à mener par le point A une droite formant avec BC l'angle x . Menons par le point A une droite quelconque AB , qui forme l'angle β avec BC . Puis, menons une seconde droite AC , formant avec la première l'angle $2^\circ - x - \beta$. Le troisième angle C sera (prop. XXVII) $2^\circ - \beta - (2^\circ - x - \beta) = x$.

XXIX. — 20.

XXX-XXXVIII. — 23-31.

LIVRE II.

LE CERCLE ET LA MESURE DES ANGLES.

Définitions. — Voyez Legendre. Ajoutez : on appelle *quadrant* le quart de la circonférence.

I-XI. — 4-14.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Lorsque deux circonférences se touchent extérieurement ou intérieurement, le point de contact est situé sur la droite qui joint les centres.

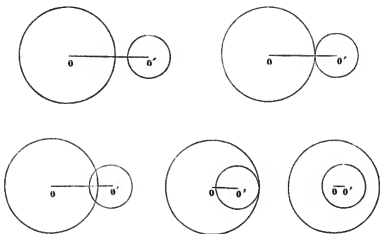
Car sans cela, en construisant le triangle ayant pour sommets les deux centres et le point de contact, ce triangle aurait un côté, à savoir, la distance des centres dans le premier cas et le grand rayon dans le second, qui serait plus grand que la somme des deux autres, ce qui est impossible. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

Déterminer les conditions qui résultent de toutes les positions relatives de deux circonférences.

Deux circonférences O et O' ne peuvent occuper, l'une par rapport à l'autre, que les positions indiquées dans les cinq figures ci-dessous.



Si l'on appelle R et r les deux rayons, D la distance des centres, les relations qui se rapportent à ces positions seront évidemment :

- I. $D > R + r$.
- II. $D = R + r$.
- III. $D < R + r$. $D > R - r$.
- IV. $D = R - r$.
- V. $D < R - r$.

Ainsi, la comparaison de la quantité D avec les quantités $R + r$ et $R - r$ fera juger immédiatement des positions respectives des deux circonférences auxquelles ces éléments appartiennent.

XIV. — 15.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les nombres abstraits exprimant deux angles au centre en fonction de l'angle droit, sont entre eux comme les nombres abstraits exprimant les arcs interceptés en fonction du quadrant.

Soient α et α' les nombres abstraits exprimant les angles donnés AOB, A'O'B', en fonction de l'angle droit, pris pour unité d'angles. Soient de même β et β' les nombres abstraits exprimant les arcs AB et A'B' en fonction du quadrant, pris pour unité d'ares. Je dis que $\alpha : \alpha' = \beta : \beta'$.

Pour le prouver, cherchons le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'}$, et pour cela portons α' sur α aussi souvent que possible; il y entrera, par exemple, 2 fois, avec un reste α'' plus petit que α' . Nous aurons donc

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 2 + \frac{\alpha''}{\alpha'} = 2 + \frac{1}{\frac{\alpha'}{\alpha''}}.$$

Pour déterminer $\frac{\alpha'}{\alpha''}$, portons α'' sur α' aussi souvent que possible, il y entrera par exemple 3 fois avec un reste α''' , donc

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} = 3 + \frac{1}{\frac{\alpha''}{\alpha'''}} \text{, etc.}$$

Cherchons maintenant le rapport $\frac{\beta}{\beta'}$; pour cela, portons β' dans β aussi souvent que possible; mais, en vertu de la proposition XIV, il s'y trouve déjà porté deux fois.

Nommons le reste β'' . On a donc

$$\frac{\beta}{\beta'} = 2 + \frac{\beta''}{\beta'} = 2 + \frac{1}{\frac{\beta'}{\beta''}}.$$

pour trouver $\frac{\beta'}{\beta''}$, il faut maintenant porter β'' sur β' , mais cette opération est déjà faite (proposition XIV) et donne

$$\frac{\beta'}{\beta''} = 3 + \frac{\beta'''}{\beta''},$$

donc

$$\frac{\beta}{\beta'} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{\beta'''}{\beta''}}, \text{ etc.}$$

On voit donc qu'en continuant à développer ces deux rapports en fractions continues, tous les quotients incomplets dans l'une et dans l'autre resteront toujours identiques; donc les deux fractions elles-mêmes le seront, donc aussi les deux rapports qu'elles expriment, donc $\alpha : \alpha' = \beta : \beta'$.

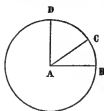
PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Le nombre abstrait exprimant la valeur d'un angle au centre en fonction de l'angle droit, est égal au nombre abstrait exprimant la valeur de l'arc intercepté en fonction du quadrant.

Soit A le nombre abstrait exprimant l'angle BAC en fonction de l'angle droit; a le nombre abstrait exprimant l'arc intercepté BC en fonction du quadrant. Je dis que $A = a$. Construisons au centre un angle droit. Cet angle comprendra évidemment un quadrant entre ses côtés, donc j'aurai (proposition XV) $A : 1 = a : 1$. Donc $A = a$.

Scholie. A l'avenir, lorsqu'un arc s'exprimera en fonction du quadrant, et un angle en fonction de l'angle droit par un seul et même nombre abstrait, je dirai, par abréviation de langage, que cet arc est



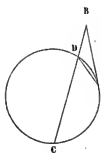
la mesure de cet angle. Ainsi, la mesure de l'angle au centre, par exemple, sera l'arc compris entre ses côtés.

XVII-XVIII. — 18-19.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

L'angle formé par une tangente et une sécante a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.

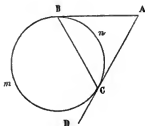


Cherchons la mesure de l'angle B. L'angle extérieur ADC vaut la somme des angles intérieurs B et BAD (livre I, prop. XXVII, corollaire V); donc $B = ADC - BAD$, mais ADC a pour mesure $\frac{AC}{2}$ (proposition XVII), et BAD, $\frac{AD}{2}$ (proposition XVIII), donc B a pour mesure $\frac{AC - AD}{2}$.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

L'angle formé par deux tangentes a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.

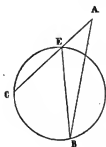


En effet, l'angle BAC, par exemple, est la différence des angles BCD, ABC; or l'angle BCD a pour mesure $\frac{BmC}{2}$ et l'angle ABC, $\frac{BnC}{2}$ (proposition XVIII), donc BAC a pour mesure $\frac{BmC - BnC}{2}$.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

L'angle formé par deux sécantes a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.

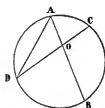


Car l'angle A, par exemple, est la différence des angles BEC, ABE; or les mesures de ces deux angles sont respectivement $\frac{BC}{2}$ et $\frac{DE}{2}$ (proposition XVII), donc la mesure de A est $\frac{BC - DE}{2}$.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

L'angle formé par deux cordes a pour mesure la demi-somme des arcs compris entre ses côtés.



Car l'angle O, par exemple, vaut la somme des angles A et ADO, qui ont pour mesure $\frac{DB}{2}$ et $\frac{AC}{2}$, donc O a pour mesure $\frac{DB + AC}{2}$.

Problèmes relatifs aux deux premiers livres. — Voyez Legendre.

LIVRE III.

LES PROPORTIONS DES FIGURES.

Définitions. — Voyez Legendre. Ajoutez : Nous adopterons comme unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur.

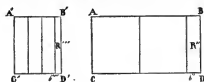
I-II. — 1-2.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Les nombres abstraits exprimant les nombres d'unités de surface contenues dans deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme les nombres abstraits exprimant les nombres d'unités de longueur contenues dans leurs bases.

Soient R et R' les nombres abstraits exprimant les rectangles donnés $ABCD$, $A'B'C'D'$, en fonction de l'unité carrée; soient de même b et b' les nombres abstraits exprimant les bases CD , $C'D'$, en fonction de l'unité de longueur. Je dis que $R : R' = b : b'$. Pour le prou-



ver, cherchons le rapport $\frac{b}{b'}$, et pour cela portons b' sur b aussi souvent que possible; il y entrera, par exemple, 2 fois,

avec un reste b'' plus petit que b' , et nous aurons donc $\frac{b}{b'} = 2 + \frac{b''}{b'}$
 $= 2 + \frac{1}{\frac{b'}{b''}}$. Pour déterminer $\frac{b'}{b''}$, plaçons b'' sur b' aussi souvent

que possible; il y entrera, par exemple, 3 fois avec un reste b''' , donc
 $\frac{b}{b'} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{b'''}{b''}}$, etc. Cherchons maintenant le rapport $\frac{R}{R'}$. Pour

cela, portons R' sur R aussi souvent que possible; mais si l'on élève
 des perpendiculaires en tous les points marqués plus haut, on voit
 que R' se trouve déjà porté 2 fois sur R . Nommons le reste R'' . On
 a donc $\frac{R}{R'} = 2 + \frac{R''}{R'} = 2 + \frac{1}{\frac{R'}{R''}}$. Pour trouver $\frac{R'}{R''}$, il faut main-

tenant porter R'' sur R' , mais cette opération est déjà faite et donne
 $\frac{R'}{R''} = 3 + \frac{R'''}{R''}$, donc $\frac{R}{R'} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{R'''}{R''}}$.

On voit donc qu'en continuant à développer ces deux rapports en
 fractions continues, tous les quotients incomplets dans l'une et dans
 l'autre resteront toujours identiques, donc les deux fractions elles-
 mêmes le seront, donc aussi les deux rapports qu'elles expriment.
 Donc $R : R' = b : b'$.

Scholie. Cette démonstration est absolument la même que celle de
 la proposition XV du livre II. Comme elle doit être suffisamment
 connue maintenant, je ne la répéterai plus dans la suite, et je ren-
 verrai à la susdite proposition et à la proposition actuelle chaque fois
 que le même raisonnement devra être employé.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Les nombres abstraits exprimant deux rectangles en fonction de l'unité carrée, sont entre eux comme les produits des nombres abstraits, exprimant leurs bases et leurs hauteurs, en fonction de l'unité de longueur.

Soit R le premier rectangle, b sa base, h sa hauteur.

» R' le second » b' sa base, h' sa hauteur.

Construisons un troisième rectangle R'' ayant pour base b et pour hauteur h' . L'un ou l'autre des deux côtés d'un rectangle pouvant indifféremment être pris comme base, et l'autre comme hauteur, on aura (proposition III) :

$$R : R'' = h : h'.$$

$$R'' : R' = b : b'.$$

Multipliant ces proportions terme à terme, et supprimant le facteur commun numérique R'', il vient

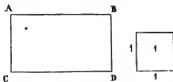
$$R : R' = bh : b'h'.$$

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Le nombre abstrait exprimant la surface d'un rectangle en fonction de l'unité carrée, est égal au produit des deux nombres abstraits exprimant les deux côtés de ce rectangle en fonction de l'unité linéaire.

Soit R le nombre abstrait exprimant le rectangle ABCD en fonction de l'unité carrée; b et h les nombres abstraits exprimant ses deux dimensions en fonction de l'unité de longueur. Je dis que $R = bh$.



Construisons un carré sur l'unité de longueur. Ce sera l'unité de surface, et, en vertu de la proposition IV, j'aurai

$$R : 1 = bh : 1 \times 1 \text{ ou } 1, \text{ donc } R = bh$$

Scholie. A l'avenir, lorsque le nombre abstrait, exprimant une surface en fonction de l'unité carrée, sera égal au produit des nombres abstraits exprimant deux lignes en fonction de l'unité de longueur, je dirai, par abréviation de langage, que le produit de ces deux lignes est la mesure de cette surface; ainsi la mesure de l'aire du rectangle, par exemple, sera égale au produit de ses deux côtés.

VI-XXXV. — 5-54.

Remarque générale. Il ne faut point perdre de vue que toutes les proportions, établies dans ce livre, sont des proportions entre nombres abstraits, exprimant soit des surfaces, en fonction de l'unité carrée, soit des lignes, en fonction de l'unité linéaire.

Problèmes. — Voyez Legendre.

LIVRE IV.

LES POLYGONES RÉGULIERS ET LA MESURE DU CERCLE.

Un polygone qui est à la fois équilatéral et équiangle s'appelle *polygone régulier*. Le triangle équilatéral est le polygone régulier de trois côtés et le carré celui de quatre.

I-VIII. — 1-8.

Scholie général sur les polygones réguliers. — Dans les propositions qui précèdent, on a exposé les moyens employés pour inscrire et circonscrire au cercle certains polygones réguliers. Le problème général se ramène évidemment à celui-ci : « Diviser, par la règle et le compas, une circonférence donnée, en un nombre n de parties égales. » Jusqu'au commencement de ce siècle, on avait cru que le problème n'était soluble que lorsque n était compris dans l'une des progressions géométriques croissantes, ayant pour raison 2, et pour premiers termes, 1, 3, 5 et 15; mais la découverte faite par l'illustre géomètre Gauss, découverte dont il est parlé dans la note sur la proposition V de Legendre, a augmenté considérablement le nombre des polygones inscriptibles.

En thèse générale, et dans l'état actuel de la science, pour que l'on puisse diviser la circonférence en n parties égales, par la règle et le compas, il faut que n soit compris dans la formule

$$2^m (2^a(2^p) + 1) (2^a(2^q) + 1) \dots$$

dans laquelle m, p, q sont des nombres entiers quelconques et a est 0 ou 1.

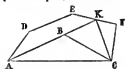
La réciproque, prise d'une manière absolue, est fautive; c'est-à-dire que, de ce qu'un nombre n est compris dans cette formule, il ne s'ensuit pas que le polygone régulier de n côtés soit inscriptible au cercle par la règle et le compas. Cependant, cette réciproque peut être admise comme exacte dans la pratique, puisqu'elle ne saurait être en défaut que si le polygone à inscrire avait au moins quatre milliards de côtés.

PROPOSITION IX.

LEMME.

Toute ligne courbe ou polygone qui enveloppe d'une extrémité à l'autre une ligne convexe donnée, est plus longue que cette dernière.

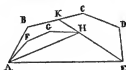
Premier cas. Soit le contour enveloppant une ligne polygonale quelconque, et le contour enveloppé composé de deux lignes droites.



Prolongeons AB jusqu'à sa rencontre avec le contour extérieur en K. On a $AK < AD + DE + EK$, $KC < KF + FC$, donc en ajoutant $AK + KC < AD + DE + EF + FC$; mais $AB +$

$BC < AK + KC$, donc à fortiori $AB + BC < AD + DE + EF + FC$.

Deuxième cas. Soient les deux contours des lignes polygonales quelconques.



Il faut démontrer que $AFGHE < ABCDE$.

Prolongeons EH jusqu'à sa rencontre avec le contour extérieur en K. On aura $KE < KC + CD + DE$, donc $ABKE < ABCDE$; le

théorème serait donc démontré si l'on avait encore $AFGHE < ABKE$, ou, retranchant de part et d'autre HE, $AFGH < ABKH$. Mais il est évident que le nouveau contour intérieur AFGH a un côté de moins que le précédent, donc, en continuant cette construction, tout se réduira à prouver l'infériorité d'un contour intérieur de deux côtés seulement, ce qui est établi par le premier cas. Donc enfin l'on a $AFGHE < ABCDE$.

* *Troisième cas.* Si les contours étaient courbes en totalité ou en partie, leur comparaison ne serait intelligible qu'à la condition que

l'on remplaçât les parties courbes par des parties polygonales d'un nombre infini de lignes droites infiniment petites (1), et, par suite, on retombe dans le cas précédent.

PROPOSITION X.

LEMME.

Lorsqu'une ligne convexe en enveloppe une autre de toutes parts, qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de points de contact, la ligne enveloppante est plus grande que la ligne enveloppée.

Premier cas. S'il y a des points de contact, joignez-les par des droites; toutes les parties enveloppantes seront plus grandes que les parties enveloppées (proposition IX), et en ajoutant, le théorème sera démontré.

Deuxième cas. Supposons qu'il n'y ait pas de points de contact, et que les deux lignes soient polygonales. Prolongeons l'un des côtés du polygone intérieur jusqu'en K et L. On aura $KL < KF + FE + ED + DL$.

Il reste donc à démontrer que $A'B'C'D'E'A' < ABCLKA$, ou retranchant de part et d'autre $E'D'$, il reste à démontrer que $E'A'B'C'D' < E'KABCLD'$. Dans les angles $A'E'K$, $C'D'L$ menons au hasard les droites $E'M$, $D'N$. Nous aurons évidemment $E'MABCND' < E'KABCLD'$, et, en vertu de la proposition IX, $E'A'B'C'D' < E'MABCND'$. Done, à fortiori, $E'A'B'C'D' < E'KABCLD'$.

* *Troisième cas.* Enfin, on passe des lignes polygonales aux lignes courbes par le raisonnement déjà employé au livre I, proposition XVII, et au livre IV, proposition IX.

XI. — 10.

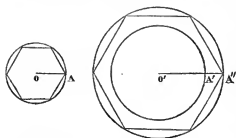
(1) Il existe cependant un cas où la comparaison serait intelligible autrement : c'est celui où les deux contours seraient deux arcs de cercle de même rayon. Or, justement, ce cas est impossible, car ces deux arcs ayant même corde, auraient même flèche (livre II, proposition VIII); donc ils auraient au moins un troisième point commun, ce qui est absurde (livre II, proposition VII).

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Les circonférences de deux cercles sont entre elles comme leurs rayons.

Je dis que $\text{circ. OA} : \text{circ. O'A'} = \text{OA} : \text{O'A'}$. En effet, dans une



proportion entre nombres abstraits, il est toujours permis de prendre au hasard les 3 premiers termes, sauf à déterminer convenablement le quatrième. Choisissons pour les 3 premiers termes de

la proportion circ. OA , circ. O'A' , et OA ; je dis que le quatrième devra être O'A' . En effet, dans le cas contraire, ce quatrième terme α devrait être plus grand ou plus petit que O'A' . Supposons-le d'abord plus grand. Entre les nombres abstraits O'A' et α prenons un nombre α' commensurable avec l'unité, ce qui est toujours possible (1),

puisque $\alpha' < \alpha$, et que $\frac{\text{circ. OA}}{\text{circ. O'A'}} = \frac{\text{OA}}{\alpha}$, on aura $\frac{\text{circ. OA}}{\text{circ. O'A'}} < \frac{\text{OA}}{\alpha'}$.

Dans la direction O'A' portons une droite exprimée en nombre abstrait par α' , ce qui est toujours possible, puisque α' est commensurable

avec l'unité. Soit O'A'' cette droite, on a donc $\frac{\text{circ. OA}}{\text{circ. O'A'}} < \frac{\text{OA}}{\text{O'A''}}$.

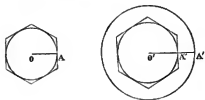
Traçons la circonférence O'A'' ; et inscrivons-y un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence intérieure (proposition XI). Inscrivons à la circonférence OA un polygone régulier semblable. Appelons leurs périmètres P et P' . On aura (prop. VIII)

(1) Car, puisque O'A' et α sont différents, si on les développe en fractions décimales, on devra finir par arriver à un chiffre différent pour un certain ordre d'unités; si alors on force le chiffre le plus petit, et si l'on s'arrête là, on aura un nombre α' compris entre O'A' et α , et évidemment commensurable avec l'unité.

$\frac{P}{P'} = \frac{OA}{O'A''}$, donc $\frac{\text{circ. } OA}{\text{circ. } O'A'} < \frac{P}{P'}$, ou, multipliant par *circ. O'A'* et divisant par P , $\frac{\text{circ. } OA}{P} < \frac{\text{circ. } O'A'}{P'}$.

Or, cette inégalité est absurde, car son premier membre est plus grand que l'unité, et son second membre plus petit (proposition X), donc il est absurde de supposer que le quatrième terme inconnu de la proportion soit plus grand que $O'A'$.

Supposons maintenant $x < O'A'$. On a $\frac{\text{circ. } OA}{\text{circ. } O'A'} = \frac{OA}{x}$. Entre x



et $O'A'$ prenons un nombre x' commensurable avec l'unité. On aura $x' > x$, et par suite, $\frac{\text{circ. } OA}{\text{circ. } O'A'} > \frac{OA}{x'}$. Portons sur $O'A'$, $O'A'' = x'$, ce qui

est évidemment possible, nous aurons donc $\frac{\text{circ. } OA}{\text{circ. } O'A'} > \frac{OA}{O'A''}$.

Traçons la *circ. O'A''*, et circonscrivons-lui un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence extérieure. Circonscrivons à la circonférence OA un polygone régulier semblable. Appelons

leurs périmètres P et P' , nous aurons (proposition VIII) $\frac{P}{P'} = \frac{OA}{O'A''}$, donc $\frac{\text{circ. } OA}{\text{circ. } O'A'} > \frac{P}{P'}$, ou en multipliant par *circ. O'A'* et divisant

par P , $\frac{\text{circ. } OA}{P} > \frac{\text{circ. } O'A'}{P'}$. Or, cette inégalité est encore ab-

surde, puisque son premier membre est plus petit que l'unité, et son second membre plus grand. Donc, il est absurde aussi de supposer le quatrième terme x moindre que $O'A'$, donc enfin il est égal à $O'A'$.
 Done, *circ. OA* : *circ. O'A'* = OA : $O'A'$ (1).

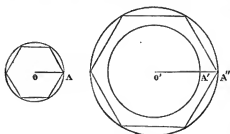
(1) Le lecteur attentif aura remarqué qu'il y a ici une double modification. D'abord la démonstration de Legendre, qui est très-défectueuse, est retournée; mais ensuite, la question de savoir si l'on peut toujours construire une droite s'exprimant en unités de longueur par un nombre abstrait donné d'avance, commensurable ou non, est écartée complètement.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Les surfaces de deux cercles sont entre elles comme les carrés de leurs rayons.

Je dis que cercle OA : cercle O'A' = $\overline{OA}^2$: $\overline{O'A'}^2$. En effet, choisis-

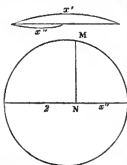


sons pour les trois premiers termes d'une proportion entre nombres abstraits *cerc.* OA, *cerc.* O'A' et $\overline{OA}^2$. Appelons x le quatrième, nous aurons

$$\text{donc } \frac{\text{cerc. OA}}{\text{cerc. O'A'}} = \frac{\overline{OA}^2}{x}.$$

1° Soit $x > \overline{O'A'}^2$. Entre $\overline{O'A'}^2$ et x , nombres abstraits, prenons un nombre abstrait x' commensurable avec l'unité. On aura $x' < x$, donc

$$\frac{\text{cerc. OA}}{\text{cerc. O'A'}} < \frac{\overline{OA}^2}{x'}.$$



à x' , ce qui est toujours possible, puisque x' est commensurable avec l'unité, puis prenons la moitié de cette longueur et appelons-la x'' , nous aurons donc $x' = 2 x''$. Sur une autre ligne droite, portons successivement deux unités de longueur, puis la longueur x'' . Sur la longueur totale, décrivons une demi-circonférence et au point N menons la perpendiculaire NM, nous aurons en nombres abstraits (liv. III, prop. XXIV, corollaire),

$\overline{MN}^2 = 2 \times x'' = 2 x'' = x'$, d'où $\overline{MN}^2$ est plus grand que $\overline{O'A'}^2$ ou MN plus grand que O'A' et de plus en portant O'A'' = MN, ou a

$$\frac{\text{cerc. OA}}{\text{cerc. O'A'}} < \frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A''}^2}.$$

Décrivons la *cerc.* $O'A''$ et inscrivons-lui un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence intérieure. Inscrivons à la circonférence OA un polygone semblable; appelons P et P' les surfaces de ces deux polygones. J'aurai (proposition VIII) $\frac{P}{P'} = \frac{OA^2}{O'A''^2}$.
 Donc $\frac{\text{cerc. } OA}{\text{cerc. } O'A'} < \frac{P}{P'}$, d'où en multipliant par *cerc.* $O'A'$ et divisant par P , $\frac{\text{cerc. } OA}{P} < \frac{\text{cerc. } O'A'}{P'}$. Mais cette dernière inégalité est absurde, car son premier membre est plus grand que l'unité, et le second plus petit. Donc, il est absurde de supposer que le quatrième terme x puisse être plus grand que $O'A'$. Par un raisonnement absolument semblable, on démontrera qu'il ne peut pas non plus être moindre, donc il est égal à $O'A'$. Donc *cercle* OA : *cercle* $O'A' = OA : O'A'$.

Scholie. Traçons un cercle dont le rayon soit 1, et appelons π le nombre abstrait exprimant la surface de ce cercle en fonction de l'unité carrée.

Si nous considérons alors un autre cercle de rayon R , nous aurons, en vertu du théorème que nous venons de démontrer : *cercle* R : $\pi = R^2 : 1$, d'où *cercle* $R = \pi R^2$.

Ainsi, la mesure du cercle R est πR^2 , π étant une quantité parfaitement définie, mais dont nous n'apprendrons que plus loin à déterminer la valeur.

PROPOSITION XIV.

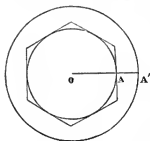
THÉORÈME.

L'aire d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.

Je dis que *cerc.* $OA = \text{circ. } OA \times \frac{OA}{2}$. En effet, si cette égalité entre nombres abstraits n'était pas exacte, je pourrais toujours poser *cerc.* $OA = \frac{\text{circ. } OA}{2} \times x$, x étant aussi un nombre abstrait, commensurable ou non.

1° Soit $x > OA$. Entre OA et x , choisissons un nombre x' commensurable avec l'unité. Nous aurons

$$x' < x, \text{ donc } \text{cerc. } OA > \frac{\text{circ. } OA}{2} \times x'.$$



Ayant porté x' en OA' , décrivons un cercle avec cette droite comme rayon.

$$\text{On a donc } \text{cerc. } OA > \frac{\text{circ. } OA}{2} \times OA';$$

mais (proposition XII), $\text{circ. } OA : \text{circ. } OA' = OA : OA'$, donc $\text{circ. } OA \times OA' = \text{circ. } OA' \times OA$, donc $\text{cerc. } OA > \frac{\text{circ. } OA'}{2} \times OA$. A la $\text{circ. } OA$ circonscrivons un

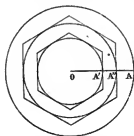
polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence OA' ; nous le nommerons P et son périmètre p . Nous aurons (propos. VII)

$$P = \frac{p}{2} \times OA. \text{ Mais } p < \text{circ. } OA' \text{ (proposition X) donc, } P < \text{cerc. } OA,$$

ce qui est absurde, donc il est absurde d'admettre que le quatrième terme x soit plus grand que OA (1).

2° $x < OA$. Entre OA et x , prenons x' comme plus haut, et portons $OA' = x'$; on a $\text{cerc. } OA < \frac{\text{circ. } OA}{2} \times OA'$ ou $\text{cerc. } OA < \text{circ. } OA' \times \frac{OA}{2}$.

Construisons une moyenne proportionnelle OA'' entre OA et OA' , nous aurons $\overline{OA''}^2 = OA \cdot OA'$. Ayant décrit la circonférence OA'' ,



circonscrivons-lui un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence extérieure. Nous l'appellerons P et son périmètre p . Circonscrivons à la circonférence OA' un polygone régulier semblable; nous l'appellerons P' et son périmètre p' . Nous avons (proposition VIII)

(1) La seconde partie de la démonstration n'étant pas la même ici, comme cela pourrait paraître au premier abord, il est nécessaire de la donner en détail.

$P : P' = \overline{OA''}^2 : \overline{OA'}^2$, mais $P' = \frac{p' \cdot OA'}{2}$, donc $P : \frac{p' \cdot OA'}{2} = \overline{OA''}^2 : \overline{OA'}^2$,
 et $P = \frac{p' \cdot \overline{OA''}^2}{2 \cdot \overline{OA'}^2}$. Mais $\frac{\overline{OA''}^2}{\overline{OA'}^2} = OA$, donc enfin $P = p' \times \frac{OA}{2}$.

Mais $p' > \text{cerc. } OA'$, donc $P > \text{cerc. } OA$, ce qui est absurde, donc il est absurde aussi d'admettre que x soit moindre que OA . Donc enfin $x = OA$, et $\text{cerc. } OA = \frac{\text{cerc. } OA \times OA}{2}$.

Scholie. Soit une circonférence de rayon R .

Où a $\text{cerc. } R = \text{cerc. } R \times \frac{R}{2}$,

d'où $\text{cerc. } R = \frac{\text{cerc. } R}{\frac{R}{2}} = \frac{\pi R^2}{\frac{R}{2}} = \frac{2\pi R^2}{R} = 2\pi R$.

Ainsi, la circonférence de rayon R a pour longueur $2\pi R$.

XV. — 15.

PROPOSITION XVI.

PROBLÈME.

Déterminer la valeur de la quantité π .

Voyez la solution de la proposition XIV de Legendre, mais remplacez le dernier alinéa par celui-ci :

Le rayon du cercle sur lequel j'ai opéré étant 1, sa surface est précisément la quantité que j'ai désignée plus haut par π , donc $\pi = 3, 1415926$.

APPENDICE AU LIVRE IV.

Définitions. — Voyez Legendre.

I-VII. — 1-7.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

De tous les triangles ayant même hauteur et même angle au sommet, le triangle isocèle est le minimum.

Pour le démontrer, plaçons les deux triangles ABC , $AB'C'$, dont le premier est isocèle, de telle manière que le sommet A soit commun, et que les bases BC , $B'C'$ se trouvent sur une même droite, ce qui est possible puisque les deux triangles ont même hauteur; dans cette position, les triangles ABC , $AB'C'$, ont une partie commune $AB'C$. Il suffit donc de démontrer que le triangle ABB' est plus petit que ACC' . Or, ces deux triangles ont les angles en A égaux; ils sont donc entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent ces angles (livre III, proposition XXV).

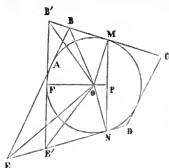
Mais parmi ces côtés, il y en a deux égaux ($AB=AC$). D'ailleurs $AB' < AC'$ comme s'écartant moins du pied de la perpendiculaire AH , donc $ABB' < ACC'$, donc $ABC < AB'C'$.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

De tous les polygones d'un même nombre de côtés circonscrits à un cercle, le polygone régulier est le plus petit.

Soit un polygone irrégulier circonscrit à un cercle. Il y aura au moins un point de contact A qui ne sera pas le milieu du côté BE , sans quoi le polygone serait régulier. Joignons les points de contact M et N



des deux tangentes, qui aboutissent en B et E . Par le centre O abaissons une perpendiculaire sur MN . Elle coupera la circonférence en F . En ce point menons une tangente qui coupe CB et DE en B' et E' , on aura $FB' = FE'$, puisque les quadrilatères $FPMB'$, $FPNE'$ peuvent coïncider. Je dis que le polygone $B'CDE'$ sera $< BCDE$. Pour cela, remarquons que ces deux poly-

gones étant circonscrits à un même cercle, sont entre eux comme leurs périmètres. Il nous suffit donc de comparer ces derniers. Or, ils ont une partie commune $BMCDNE'$; il reste donc à prouver que $BB' + B'E' < BE + EE'$. Joignons B, B', E et E' au centre. Les quatre droites ainsi menées sont évidemment les bissectrices des angles B, B', E, E' , et comme $B + E = B' + E'$ (livre I, proposition XXIX), on voit que la somme des angles à la base des triangles $OBE, OB'E'$ est la même aussi; donc, puisque la somme des angles d'un triangle est constante, il vient $\angle BOE = \angle B'OE'$. Dès lors, les triangles $BOE, B'OE'$, ont même hauteur et même angle au sommet, donc (proposition VIII), le triangle isocèle $B'OE'$ est le plus petit; mais ayant même hauteur, ils sont entre eux comme leurs bases, donc $B'E' < BE$ (1). Retranchant des angles égaux en O la partie commune $B'OE$, il reste $\angle BOB' = \angle EOE'$, donc les triangles BOB', EOE' , ont un angle égal. Ils sont donc entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle; mais parmi ces côtés il y en a deux égaux ($OB' = OE'$), et l'autre OB est moindre que OE , comme s'écartant moins du pied des perpendicu-

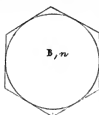
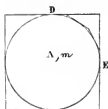
lares OM, ON. Donc, $OB'B' < OEE'$; d'ailleurs, ces deux triangles ayant même hauteur, il en résulte $BB' < EE'$ (2). Ajoutant les inégalités (1) et (2), il vient $BB' + B'E' < BE + EE'$, et c'est ce qui restait à démontrer. On voit donc que tant que le polygone donné ne sera pas régulier, on pourra en circonscrire un autre, d'un même nombre de côtés et plus petit. Donc, de tous les polygones d'un même nombre de côtés circonscrits à un cercle, le plus petit est le polygone régulier.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

De deux polygones réguliers circonscrits à un cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus petit.

Supposons circonscrits à un même cercle ou à deux cercles égaux



deux polygones réguliers A et B, ayant respectivement m et n côtés ($n > m$). Je dis que $A > B$.

Pour le démontrer, sur l'arc DE choisissons $n - m$ points, et en ces points menons des tangentes au cercle, de manière à former un troisième polygone C, lequel aura évidemment $m + (n - m)$ ou n côtés.

Or, l'on a évidemment $A > C$, et l'on a aussi $C > B$, d'après le théorème précédent, donc $A > B$.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

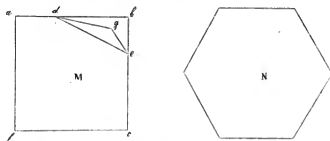
De deux polygones réguliers isopérimètres, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus grand.

Soient deux polygones réguliers isopérimètres M et N, ayant respectivement m et n côtés. Soit $n > m$, je dis que $N > M$. En effet, si

cette inégalité n'était pas exacte, on devrait avoir, ou bien $N=M$ ou bien $M>N$.

Premier cas. $N=M$. Les deux polygones ayant même périmètre, sont entre eux comme les rayons des cercles inscrits; si donc ils sont égaux, c'est que ces rayons eux-mêmes le sont. Dès lors, M et N sont deux polygones réguliers circonscrits au même cercle; mais dans ce cas, ils ne peuvent être égaux (proposition X), donc l'hypothèse est absurde.

Deuxième cas. $M>N$. Il me sera évidemment toujours possible de construire un triangle ayant un angle égal à abc et dont la surface



soit moindre que la différence $M-N$ (1). Cela fait, portons ce triangle sur le polygone M en dbe de manière que l'angle égal en b coïncide (si les côtés du triangle débordaient ceux du polygone, on n'aurait qu'à mener une droite au hasard, car bde serait alors à plus forte raison plus petit que $M-N$). Enfin sur de construisons une portion de polygone convexe dge ayant $n-m$ côtés. Nommons P le polygone de n côtés $adgectf$. Puisque $dbeg$ est moindre que la différence $M-N$, on a encore $P>N$. Entre les côtés de P , construisons une moyenne arithmétique, et sur cette moyenne arithmétique traçons un polygone régulier semblable à N . Nommons-le Q . Nous aurons $Q>P$ (proposition VII). Donc $Q>N$; mais Q et N étant deux polygones réguliers semblables, il faudrait donc que le côté ou, ce qui

(1) Il suffit pour cela, après avoir choisi une aire moindre que $M-N$, de prendre sur l'un des côtés de l'angle une base au hasard, puis de mener une parallèle à la hauteur nécessaire pour avoir l'aire demandée. Son intersection avec le second côté déterminera le sommet.

revient au même, le périmètre de Q fût plus grand que celui de N. Or, c'est le contraire qui est vrai, car les périmètres de Q et de N sont respectivement les mêmes que ceux de P et de M, donc le premier est moindre que le second (livre IV, proposition X). On voit donc que l'hypothèse $M > N$ conduit encore à un résultat absurde.

Donc enfin $N > M$, c'est-à-dire que de deux polygones réguliers isopérimètres, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus grand.

* XII. — 40.

LIVRE V.

LES PLANS ET LES ANGLES SOLIDES.

Définitions. — Voyez Legendre, mais supprimez les définitions IV et V.

Lorsque deux plans ont trois points communs, non situés sur une même ligne droite, ils doivent coïncider dans toute leur étendue. En effet, choisissons un point quelconque dans le premier, et par ce point, menons dans ce premier plan une sécante au triangle formé par les trois points communs. Les trois côtés de ce triangle sont dans le second plan (livre I, définition du plan), donc la sécante, ayant deux points dans le second plan, y est tout entière; on voit donc qu'en choisissant un point au hasard dans le premier plan, il est aussi dans le second, donc les deux plans coïncident. Dès lors, la ligne suivant laquelle deux plans se coupent doit être une ligne droite. En effet, si l'on joint deux de ses points par une droite, cette droite étant dans les deux plans fera partie de leur intersection, et s'il existait sur l'intersection un point qui ne fit pas partie de la droite, les deux plans passant par trois points non en ligne droite devraient coïncider. Ainsi donc deux plans se coupent toujours suivant une ligne droite.

Cela posé, on appelle coin ou angle de deux plans, la quantité plus ou moins grande dont ces deux plans s'écartent l'un de l'autre.

Lorsqu'un plan en rencontre un autre de manière à former avec lui deux coins égaux, ces coins se nomment coins droits, et les plans sont dits perpendiculaires entre eux.

I-XIII. — 4-16.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

Si, par des points quelconques, pris sur l'intersection de deux plans, on mène des plans perpendiculaires à cette intersection, tous les angles plans formés par les intersections de ces plans sécants avec les deux premiers seront égaux.

En effet, les côtés de tous ces angles plans seront parallèles (proposition VII), donc ces angles seront égaux (proposition X).

Scholie. Cet angle plan constant formé par les deux perpendiculaires à l'intersection menées dans les deux plans s'appelle l'angle plan du coin donné.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Deux coins égaux ont des angles plans égaux et réciproquement.

Supposons deux coins égaux, et leurs angles plans construits en A et A'. Faisons coïncider les deux coins en ayant soin que le point A soit sur le point A'. Les deux perpendiculaires à l'intersection dans les deux plans devront évidemment coïncider, donc les angles plans sont égaux. Supposons les angles plans égaux. Faisons coïncider l'un des plans et l'intersection, en plaçant toujours A sur A'. Les deux plans perpendiculaires en A et A', à la même intersection, coïncideront et l'un des côtés de l'angle plan du coin A recouvrant déjà le côté correspondant du coin A', l'autre coïncidera aussi, puisque les angles plans sont égaux. Le second plan du coin A aura donc alors deux lignes droites couchées dans le second plan du coin A' et par suite coïncidera avec lui. Ainsi, l'égalité des angles plans entraîne l'égalité des coins.

Corollaire. Dans un coin droit, l'angle plan est droit et réciproquement, si l'angle plan d'un coin est droit, ce coin est droit lui-même.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Les nombres abstraits exprimant deux coins en fonction du coin droit sont entre eux comme les nombres abstraits exprimant leurs angles plans en fonction de l'angle droit.

La démonstration étant identiquement la même que celles qui ont été données au livre II (proposition XV), et au livre III (propos. III), je m'abstiendrai de la reproduire.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Le nombre abstrait exprimant un coin en fonction du coin droit, est égal au nombre abstrait exprimant son angle plan en fonction de l'angle droit.

Soit A le nombre abstrait exprimant un coin en fonction du coin droit; a le nombre exprimant son angle plan en fonction de l'angle droit, je dis que $A = a$.

Construisons un coin droit. Son angle plan sera droit (proposition XV, corollaire), donc, j'aurai (proposition XVI) $A : 1 = a : 1$. Donc $A = a$.

Scholie. Le nombre abstrait exprimant le coin étant le même que celui exprimant l'angle plan, on dit, par abréviation de langage, que le coin a pour mesure son angle plan.

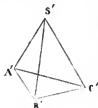
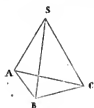
XVIII-XXII. — 18-22.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Si deux angles solides sont composés de trois angles plans égaux, chacun à chacun, les plans dans lesquels sont les angles égaux seront également inclinés entre eux.

Soit $ASC = A'S'C'$, $ASB = A'S'B'$, $BSC = B'S'C'$. Je dis que le coin SA , par exemple, est égal au coin $S'A'$. Pour le démontrer, portons les longueurs $SA = S'A'$.



En A et en A' construisons les angles plans des deux coins. Joignons BC et $B'C'$.

Les triangles SAB , $S'A'B'$, ayant tous les angles égaux, et $SA = S'A'$, sont égaux, donc $AB = A'B'$ et $SB = S'B'$. Les triangles ASC , $A'S'C'$, sont égaux pour la même raison, donc $AC = A'C'$ et $SC = S'C'$. Donc les triangles SBC , $S'B'C'$ ont un angle égal en S , compris entre côtés égaux, donc ils sont égaux, donc $BC = B'C'$. Dès lors les triangles ABC , $A'B'C'$ ont les trois côtés égaux, donc ils sont égaux, donc l'angle plan en A est égal à l'angle plan en A' , et par suite les coins SA et $S'A'$ sont égaux.

Scholie. — Voyez Legendre.

PROPOSITION XXIV.

PROBLÈME (1).

Étant donnés les trois angles plans qui forment un angle solide, trouver par une construction plane l'angle que deux de ces plans font entre eux.

Soit S l'angle solide proposé, dans lequel on connaît les trois angles

(1) J'ai cru devoir donner, pour ce problème et le suivant, des solutions directes se rapprochant des procédés de la géométrie descriptive.

Supposons l'angle ASC rabattu en ASC' . Au point A de SA , construisons l'angle plan du coin. L'un de ses deux côtés sera AO et l'autre AC' relevé. Si donc nous rabattons le plan perpendiculaire OC' sur le plan du papier, en prenant l'angle OAC égal à l'angle plan, mesure du coin donné, le point C devra tomber sur AC . Il est d'ailleurs complètement déterminé par sa distance $AC = AC'$ au point A . Il est donc évident que la perpendiculaire abaissée du point C de l'espace sur le plan du papier tomberait en O .

Rabattons maintenant le troisième angle plan autour de SB . Le point C ne peut sortir du plan perpendiculaire OC'' . Il s'arrêtera donc sur l'intersection OC'' de ce plan et du plan du papier. Il est d'ailleurs complètement déterminé, au moyen d'un arc de cercle, par sa distance SC' au point S . Joignant SC'' , l'angle BSC est rabattu en vraie grandeur en BSC'' et par suite le problème est résolu.

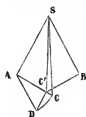
Scholie. — Voyez Legendre.

PROPOSITION XXVI.

PROBLÈME.

Étant donnés, dans un trièdre, deux coins égaux, et l'angle plan compris, déterminer les autres angles plans.

Soit ASB l'angle plan donné ; on donne aussi les coins $SA = SB$.



Portons les longueurs $SA = SB$. En A et B , menons deux plans perpendiculaires aux arêtes. Ces deux plans occuperont le plan du papier suivant AC' et BC' qui se rencontrent en C' , et l'on aura $AC' = BC'$ à cause de l'égalité des triangles rectangles ASC' , BSC' .

Les intersections des deux plans perpendiculaires avec les deux plans ASC , BSC , devant faire des angles égaux avec AC' , BC' , puisque les coins donnés sont égaux, iront rencontrer la perpendiculaire au papier menée en C' à des hauteurs égales ; en

d'autres termes, ces deux intersections se couperont en C sur la perpendiculaire C'.

D'ailleurs, elles appartiennent aux deux plans ASC, BSC. On voit donc que l'intersection SC des deux dernières faces du trièdre passe par un point C situé sur la perpendiculaire C'. Cela posé, rabattons le plan AC'. Le point C tombera quelque part sur la perpendiculaire C'D. Quant à l'intersection AC, elle se rabattra en AD en faisant avec AC' un angle C'AD égal à la mesure du coin donné. Le point C se rabattra donc en D, et par suite sa distance AD au point A sera connue. Si alors on rabat le plan SAC autour de SA, le point C tombe sur la perpendiculaire AC' à une distance AC = AD; l'angle CSA est donc rabattu en vraie grandeur et le problème est résolu.

LIVRE VI.

DES POLYÈDRES.

Définitions. — Voyez Legendre. Ajoutez : Nous adopterons comme unité de volume le cube construit sur l'unité de longueur.

I-XI. — 1-11.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Les nombres abstraits exprimant les nombres d'unités de volume contenues dans deux parallélépipèdes rectangles de même base, sont entre eux comme les nombres abstraits exprimant les nombres d'unités de longueurs contenues dans leurs hauteurs.

La démonstration est identiquement la même que celles qui ont été données au livre II (proposition XV) et au livre III (proposition III).

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Les nombres abstraits exprimant les nombres d'unités de volume contenues dans deux parallélépipèdes rectangles de même hauteur, sont entre eux comme les nombres abstraits exprimant les nombres d'unités carrées contenues dans leurs bases.

Soit h la hauteur commune des deux parallélépipèdes P , P' ; a , b , les deux dimensions de la base du premier; a' , b' , les dimensions correspondantes du second.

Construisons un troisième parallépipède, P'' , ayant pour dimensions h, a, b' .

L'une quelconque des faces d'un parallépipède rectangle pouvant indifféremment être prise comme base, et l'arête perpendiculaire comme hauteur, on aura (proposition XII).

$$P : P'' = b : b'$$

$$P'' : P' = a : a'.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme et supprimant le facteur commun numérique P'' , il vient $P : P' = ab : a'b'$.

Donc, les nombres abstraits exprimant les deux parallépipèdes sont entre eux comme les produits des dimensions des bases, ou comme les nombres abstraits exprimant les bases (livre III).

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

Les nombres abstraits exprimant deux parallépipèdes rectangles quelconques en fonction de l'unité cubique, sont entre eux comme les produits des trois nombres abstraits exprimant leurs arêtes en fonction de l'unité linéaire.

Soient les deux parallépipèdes rectangles P et P' ayant pour dimensions respectives $a, b, c ; a', b', c'$.

Construisons un troisième parallépipède P'' ayant pour dimensions a, b, c' .

Nous aurons (proposition XII),

$$P : P'' = c : c' \quad \text{et (prop. XIII)}$$

$$P'' : P' = ab : a'b'$$

d'où, en multipliant et en omettant le facteur commun numérique P'' :

$$P : P' = abc : a'b'c'.$$

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Le nombre abstrait exprimant un parallépipède rectangle en fonction de l'unité cubique est égal au produit des trois nombres abstraits exprimant ses arêtes en fonction de l'unité linéaire, ou, ce qui revient au même, au produit du nombre abstrait exprimant sa base en fonction de l'unité carrée par le nombre abstrait exprimant sa hauteur en fonction de l'unité linéaire.

Soit P le nombre abstrait exprimant un parallépipède en fonction de l'unité cubique; soient a , b , c , les nombres abstraits exprimant ses trois dimensions en fonction de l'unité linéaire, je dis que $P = abc$.

Construisons un cube sur l'unité de longueur; ce sera l'unité de volume, et, en vertu de la proposition XIV, j'aurai $P : 1 = abc : 1$, donc $P = abc$. Considérons maintenant le rectangle ab , par exemple, comme la base du parallépipède, et c comme sa hauteur; ab étant égal au nombre abstrait exprimant le rectangle en fonction de l'unité carrée, la seconde partie de l'énoncé est également établie.

Scholie. A l'avenir, lorsque le nombre abstrait exprimant un volume en fonction de l'unité cubique vaudra le produit de trois nombres abstraits exprimant trois lignes en fonction de l'unité de longueur, je dirai, par abréviation de langage, que le produit de ces trois lignes est la mesure de ce volume. Ainsi, la mesure d'un parallépipède rectangle, par exemple, vaut le produit de ses trois arêtes. De même, lorsque le nombre abstrait exprimant, un volume en fonction de l'unité cubique, sera égal au produit de deux nombres abstraits exprimant, l'un une surface en fonction de l'unité carrée, l'autre une ligne en fonction de l'unité linéaire, je dirai encore, par abréviation de langage, que le produit de cette surface par cette ligne est la mesure de ce volume.

Ainsi, la mesure d'un parallépipède rectangle, par exemple, vaut encore le produit de sa base par sa hauteur.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales sont équivalentes.

Voyez la proposition XVII de Legendre, mais remplacez le premier alinéa par celui-ci :

Soient $SABC$, $sabc$, les deux pyramides dont les bases ABC , abc , que nous supposons placées sur un même plan, sont équivalentes et qui ont même hauteur TA ; si ces pyramides ne sont pas équivalentes, soit $sabc$ la plus petite, nommons M leur différence exprimée en unités cubiques, et B la base ABC exprimée en unités carrées ; entre zéro et le nombre abstrait $\frac{M}{B}$ choisissons un nombre abstrait x , commensurable avec l'unité, puis portons, sur une perpendiculaire à la base ABC , une longueur Ax renfermant un nombre d'unités linéaires indiqué par x , et construisons le prisme ayant pour base ABC et pour hauteur Ax . Puisque $x < \frac{M}{B}$, il vient $Bx < M$, donc le prisme $ABCx$ est moindre que la différence des deux pyramides.

Divisez, etc., comme dans Legendre.

XIX-XXVIII. — 18-27.



LIVRE VII.

LA SPHÈRE.

Définitions. — Voyez Legendre, mais remplacez la VI^e par celle-ci :

VI. L'angle de deux arcs de grand cercle est la quantité plus ou moins grande dont ces deux arcs s'écartent l'un de l'autre.

Le triangle sphérique est une partie de la surface de la sphère comprise par trois arcs de grands cercles. Le triangle sphérique a donc, comme le triangle rectiligne, six éléments, savoir : trois angles et trois côtés. Ceux-ci sont toujours supposés plus petits que la demi-circconférence. Lorsqu'un arc de grand cercle en rencontre un autre en faisant avec lui des angles adjacents égaux, les deux arcs sont perpendiculaires entre eux et les angles formés s'appellent angles droits. L'angle moindre qu'un angle droit s'appelle angle aigu, l'angle plus grand s'appelle angle obtus.

I-II. — 1-2.

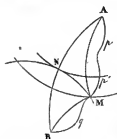
PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface de la sphère, est l'arc de grand cercle qui joint les deux points donnés.

En effet, supposons qu'il n'en soit point ainsi, et soit $ApMqB$ un

plus court chemin entre A et B (1); sur ce chemin prenons au hasard un point M, menons les arcs de grands cercles AM, MB, et portons $BN=BM$.



On a $AN+NB < AM+MB$ (proposit. II), donc $AN < AM$. Si donc du point A comme pôle avec AM comme rayon, je décris un petit cercle, le point N restera dans l'intérieur de ce cercle. Des points B et A, avec BN et AN comme rayons sphériques, décrivons deux

petits cercles, le premier passera en M, puisque $BN=BM$, et le second, devant rester dans l'intérieur du cercle AM, coupera le plus court chemin ApM en p' par exemple. Faisons tourner maintenant les chemins BqM et App' autour de B et de A jusqu'à ce que M et p' décrivant les petits cercles MN, $p'N$, se confondent en N. J'aurai dès lors entre A et B un chemin $App'+MqB$, plus court de toute la quantité Mp' que le prétendu plus court chemin $App'MqB$. Donc, aucun chemin différent de ANB ne peut être le plus court, donc ANB est l'unique plus court chemin entre A et B.

IV-V. — 4-5.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Lorsque deux angles sphériques sont égaux, les angles formés par les plans de leurs côtés le sont aussi et réciproquement.

En effet, si l'on fait coïncider les deux angles sphériques, les plans dans lesquels se trouvent leurs côtés, ayant plus de deux points communs, coïncideront chacun à chacun, donc leurs angles dièdres seront égaux.

Réciproquement, si les angles dièdres sont égaux, en les faisant coïncider, les intersections de leurs faces avec la sphère coïncideront, donc les angles sphériques seront égaux.

Corollaire. Lorsqu'un angle sphérique est droit, le coin formé par les plans de ses deux côtés est droit aussi, et réciproquement.

(1) Je dis un plus court chemin et non le plus court chemin, car il ne faut point supposer à priori qu'il n'y en ait qu'un seul.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Les nombres abstraits exprimant deux angles sphériques en fonction de l'angle sphérique droit sont entre eux comme les nombres abstraits exprimant leurs coins en fonction du coin droit.

La démonstration est identique à celles de la proposition XV du livre II et de la proposition III du livre III.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Le nombre abstrait exprimant un angle sphérique en fonction de l'angle sphérique droit est égal au nombre abstrait exprimant son coin en fonction du coin droit.

Soit A le nombre abstrait exprimant un angle sphérique en fonction de l'angle sphérique droit, B celui exprimant son coin en fonction du coin droit. Je dis que $A = B$; en effet, construisons un angle sphérique droit; son coin sera droit (proposition XXVI, corollaire), donc j'aurai (proposition VII) $A : 1 = B : 1$, ou $A = B$.

Scholie. Le nombre abstrait exprimant l'angle sphérique étant le même que celui exprimant son coin, on dit, par abréviation de langage, que l'angle sphérique a pour mesure le coin formé par les plans de ses deux côtés.

IX-XXII. — 6-19.

Ajoutez à la dernière proposition : Nous adopterons à l'avenir le triangle sphérique tri-rectangle comme unité de surface sphérique.

XXIII. — 21.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

Les nombres abstraits exprimant deux fuseaux en fonction de l'unité de surface sphérique sont entre eux comme les nombres abstraits exprimant leurs angles en fonction de l'angle droit.

La démonstration est identiquement la même que celles de la proposition XV du livre II et de la proposition III du livre III.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

Le nombre abstrait exprimant la surface d'un fuseau en fonction de l'unité sphérique est égal au nombre abstrait exprimant le double de son angle en fonction de l'angle droit.

Soit F le nombre abstrait exprimant un fuseau en fonction de l'unité de surface sphérique, A le nombre abstrait exprimant son angle en fonction de l'angle droit. Je dis que $F = 2A$.

Pour le prouver, menons deux grands cercles perpendiculaires entre eux. Ils diviseront la sphère en quatre fuseaux égaux dont les angles seront droits, et qui vaudront chacun deux triangles tri-rectangles. J'aurai donc (proposition XXIV) :

$$F : 2 = A : 1, \text{ ou } F = 2A.$$

Scholie. A l'avenir, lorsque les deux nombres abstraits exprimant, l'un une portion de surface sphérique en fonction du triangle tri-rectangle, l'autre un angle en fonction de l'angle droit, seront égaux entre eux, je dirai, par abréviation de langage, que cet angle est la mesure de cette surface. Ainsi, par exemple, l'angle $2A$ sera la mesure du fuseau dont l'angle est A .

XXVI-XXXI. — 22-27.



APPENDICE AUX LIVRES VI ET VII.

LES POLYÈDRES RÉGULIERS (1).

Nous avons vu (livre VI, déf.) que l'on appelle polyèdres réguliers, les polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles solides sont égaux entre eux.

(1) La théorie des polyèdres réguliers est complètement refondue. Ce travail n'était pas terminé lors de l'impression de la préface; il n'a donc pu y être annoncé. Les reproches principaux que j'adresse à la théorie de Legendre sont les suivants :

1° Elle n'établit pas clairement qu'il n'y a que cinq polyèdres réguliers. On voit bien qu'il n'y a que cinq manières différentes de réunir des angles de polygones réguliers autour d'un même point, mais on ne voit pas pourquoi, avec la même face et le même nombre d'angles plans autour de chaque point, on ne pourrait pas construire deux polyèdres n'ayant pas le même nombre de faces. Cette construction est effectivement impossible, mais le fait mérite une explication;

2° La construction de l'icosaèdre régulier dans Legendre, et à plus forte raison dans les autres auteurs, exige une grande habitude de ce que l'on appelle ordinairement : « voir dans l'espace. » Ces constructions ont l'inconvénient grave d'habituer le commençant à ne voir qu'à peu près, et à comprendre autant qu'il le faut pour retenir. La construction que je présente est certes moins naturelle, mais la complication est évitée, à tel point que l'on pourrait comprendre le raisonnement sans figure;

3° Enfin, la théorie ordinaire présente une lacune que j'ai signalée dans le paragraphe n de la préface.

Nous verrons, dans les propositions suivantes, que l'on peut construire, avec un côté donné, cinq polyèdres réguliers. Ce sont :

Le *tétraèdre régulier*, dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux, s'assemblant trois à trois pour former chaque angle solide.

L'*hexaèdre régulier* ou *cube*, dont les six faces sont des carrés, s'assemblant trois à trois pour former chaque angle solide.

L'*octaèdre régulier*, dont les huit faces sont des triangles équilatéraux, s'assemblant quatre à quatre pour former chaque angle solide.

Le *dodécaèdre régulier*, dont les douze faces sont des pentagones réguliers, s'assemblant trois à trois pour former chaque angle solide.

L'*icosaèdre régulier*, dont les vingt faces sont des triangles équilatéraux s'assemblant cinq à cinq pour former chaque angle solide.

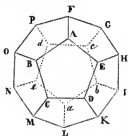
PROPOSITION 1^{re}.

PROBLÈME.

Étant donné le côté d'un tétraèdre, d'un hexaèdre, d'un octaèdre ou d'un dodécaèdre régulier, construire le polyèdre.

Tétraèdre, hexaèdre, octaèdre : Voyez Legendre.

Dodécaèdre : Avec trois angles AEH, HED, AED égaux entre eux et à l'angle du pentagone régulier, on formera un angle trièdre E; ses trois dièdres seront égaux. Sur chacun de ces angles AEH, AED, DEH, on achèvera un pentagone régulier, en donnant à ces trois polygones des côtés égaux au côté donné. Soient EABCD, AEHGF, HEDKI ces trois pentagones. Les deux droites AF, AB formeront un angle FAB égal à AEH; car le trièdre déterminé par les trois arêtes



AF, AE, AB et le trièdre E ont deux faces égales, également inclinées et sont égaux. Donc, $FAB = AEH$. On pourra donc aussi sur FA et AB construire un pentagone FAO égal à ABD. On pourra de même placer le pentagone OBM égal aux précédents. Si l'on fait de même sur MCD

et KDC, les deux plans ainsi obtenus se confondront comme faisant avec le plan CDA un angle dièdre égal à HEAD. Cela posé, aux points H, F, O, M, K, se rencontrent les mêmes circonstances qu'en A, B, C, D.

Donc, on pourra assembler en ces points cinq nouveaux pentagones égaux entre eux et aux six précédents; ces figures ne laisseront plus que l'espace vide *abcde*, circonscrit par cinq côtés égaux. Or, en chacun des points *a, b, c, d, e*, il se passe encore ce que nous avons rencontré en A, B, etc. Donc le plan *abc* contiendra aussi les trois droites *cd, de, ea*, et fera avec chacun des plans adjacents des angles dièdres égaux entre eux et aux autres dièdres de la figure. On aura donc ainsi construit un dodécaèdre régulier (1).

Scholie. Le dodécaèdre régulier a 20 sommets, à savoir les cinq du pentagone primitif, les dix du contour PONM etc., et les cinq du pentagone qui ferme le solide.

PROPOSITION II.

PROBLÈME.

Trouver l'inclinaison de deux faces adjacentes d'un tétraèdre, d'un hexaèdre, d'un octaèdre ou d'un dodécaèdre régulier.

Voyez la solution de la proposition III de Legendre, mais supprimez ce qui est relatif à l'icosaèdre.

PROPOSITION III.

PROBLÈME.

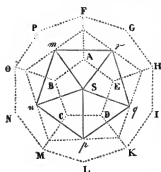
Sur un côté donné, construire un icosaèdre régulier.

Construisons la mesure d'un coin de dodécaèdre régulier (proposition II), puis sur le côté donné AB, décrivons un segment capable de cet angle. Menons sa flèche CD, et avec BD comme rayon, décrivons un cercle. Circonscrivons-lui un pentagone régulier, et sur ce pentagone construisons un dodécaèdre régulier (proposition I).



(1) Cette construction du dodécaèdre, préférable à celle de Legendre, se trouve dans la Géométrie de M. Finck.

Prenons les centres des douze pentagones réguliers qui forment le dodécaèdre et joignons chacun de ces centres aux cinq centres voisins



par des droites. Toutes ces droites seront égales entre elles et à la droite AB de la figure précédente (car le triangle ABD et celui formé dans l'espace par les apothèmes de deux pentagones adjacents et la droite qui joint leurs centres sont égaux d'après la construction). Nous aurons donc ainsi construit un polyèdre dont les faces seront des triangles équilatéraux, et dont les angles solides se com-

poseront de cinq angles de triangles équilatéraux.

Pour montrer l'égalité de tous les angles solides, prenons les centres des cinq pentagones réguliers avoisinant l'une quelconque des faces, et par ces cinq points menons des parallèles au côté commun ; ces parallèles iront évidemment se couper sur les droites AF, BO, CM, DK, EH, et constitueront un seul et même plan parallèle au plan ABC, puisqu'elles lui sont toutes parallèles. De plus, le polygone ainsi formé est un pentagone régulier, car il a les cinq côtés évidemment égaux, et les angles égaux (livre V, proposition X). Les cinq centres m, n, p, q, r sont donc les milieux des côtés d'un pentagone régulier, donc ils constituent eux-mêmes un autre pentagone régulier. Dès lors, il est évident que le coin Sm de deux faces du polyèdre construit appartient à un trièdre m dont deux angles plans sont des angles de triangles équilatéraux, comprenant entre eux le coin en question, et le troisième un angle de pentagone régulier. Or, tous ces trièdres seront égaux (livre V, proposition XXIII). Donc, ce coin est constant et par suite tous les angles solides sont égaux.

Le solide construit est donc un polyèdre régulier.

Pour connaître le nombre de ses faces, remarquons qu'à chaque sommet du dodécaèdre correspondent trois faces qui donnent un triangle équilatéral en joignant leurs centres.

Il y a donc autant de faces dans le nouveau polyèdre que de sommets dans le dodécaèdre, c'est-à-dire vingt (proposition I^{re}, scholie).

Ainsi donc le polyèdre régulier construit a vingt faces; c'est donc un icosaèdre régulier et de plus il a le côté voulu.

Scholie. Pour trouver l'inclinaison de deux faces adjacentes de l'icosaèdre, il suffit de construire le coin compris entre les deux angles de triangle équilatéral, dans le trièdre formé par ces deux angles et un angle de pentagone régulier.

PROPOSITION IV.

PROBLÈME.

Connaissant, dans un polyèdre régulier, le nombre de côtés des faces, et le nombre d'angles plans s'assemblant autour de chaque sommet, déterminer le nombre des faces, des arêtes et des sommets du polyèdre.

Soit x le nombre de côtés des faces, y le nombre d'angles plans s'assemblant autour de chaque sommet.

Appelons, comme au livre VII, H , A , S , les nombres de faces, d'arêtes et de sommets du polyèdre.

Remarquons que le nombre total des angles plans du polyèdre peut être calculé de trois manières différentes.

D'abord, puisqu'il y a H faces, et dans chaque face x côtés et x angles, le polyèdre présentera en tout Hx angles plans.

Ensuite, il y a S sommets et y angles plans en chaque sommet, donc en tout Sy angles plans.

Enfin, si toutes les faces étaient disjointes, le nombre total des angles plans serait le même que le nombre des arêtes, mais en les rejoignant, chaque arête appartient à deux faces; le nombre des angles est donc double du nombre des arêtes, c'est-à-dire $2A$.

Ce nombre d'angles plans ne pouvant assumer qu'une seule valeur, on a l'équation

$$Hx = Sy = 2A$$

$$\text{On en tire } A = \frac{Hx}{2}, S = \frac{Hx}{y}.$$

Reprenons maintenant l'équation démontrée (liv. VII, prop. XXIX):

$$S + H = A + 2,$$

En y substituant les valeurs précédentes, elle devient

$$\frac{Hx}{y} + H = \frac{Hx}{2} + 2,$$

$$\text{d'où } H = \frac{4y}{2(x+y) - xy}$$

Remplaçant dans A et S, on a aussi

$$A = \frac{4xy}{4(x+y) - 2xy}, S = \frac{4x}{2(x+y) - xy}.$$

x et y étant donnés, ces trois formules donneront H , A et S .

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers.

D'abord, il existe cinq polyèdres réguliers, puisque, dans les problèmes précédents, nous avons appris à les construire.

Ensuite, pour en construire un autre, il faudrait d'abord adopter une face. Cette face ne pourrait être qu'un triangle équilatéral, un carré ou un pentagone régulier, car trois angles d'hexagones réguliers valent quatre angles droits, et ne peuvent donc constituer un angle solide (livre V, proposition XXII). A plus forte raison ne pourrait-on pas essayer l'heptagone, etc.

Ensuite, pour le même motif, on ne pourra prendre que trois, quatre ou cinq triangles équilatéraux, trois carrés ou trois pentagones pour former ces angles solides. Mais ces cinq combinaisons se retrouvent dans les cinq polyèdres construits plus haut. Donc, déjà le nouveau polyèdre à construire aura la même face et la même espèce d'angle solide que l'un des polyèdres connus; mais dès lors, il aura aussi, d'après le problème précédent, le même nombre de faces, d'arêtes et de sommets. Ce sera donc la même espèce de polyèdre. Donc, il n'y a que cinq polyèdres réguliers.

VI. — 4.

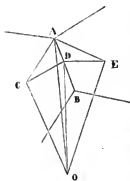
PROPOSITION VII.

PROBLÈME.

Étant donnée une sphère, lui circonscrire l'un quelconque des cinq polyèdres réguliers.

Je prendrai pour exemple le dodécaèdre régulier, mais mon raisonnement sera général.

Supposons le problème résolu, et soit AB une des arêtes du dodécaèdre circonscrit à la sphère donnée; C et E les centres des faces auxquelles appartient l'arête AB . Abaissons les perpendiculaires CD , ED



sur le milieu de AB . Menons le plan CDE . Il renfermera les deux perpendiculaires CO , EO , qui se couperont en O , comme on l'a vu dans la proposition VI. L'angle CDE étant la mesure du coin AB peut être construit dès que l'on connaît l'espèce de polyèdre dont il s'agit. Donc dans le quadrilatère $CDEO$, on connaît tous les angles et de plus le côté OC qui est le rayon de la sphère donnée. Construisant ce quadrilatère sur un plan, on connaîtra la longueur CD . Décrivant la circonférence CD et

lui circonscrivant un pentagone régulier (1), ce pentagone sera une face du polyèdre cherché, lequel se construira alors comme il est dit dans les propositions I ou III.

PROPOSITION VIII.

PROBLÈME.

Étant donnée une sphère, y inscrire l'un quelconque des cinq polyèdres réguliers.

Supposons encore la question résolue et reprenons la figure du problème précédent. Remarquons que le coin formé par les plans

(1) La construction sera toujours possible, puisque les polyèdres réguliers

OAC, ODC, a pour mesure l'angle ACD, demi-angle au centre de pentagone régulier (1), de même que le coin formé par les plans DEO, AEO. Si donc nous considérons le trièdre formé en O par les plans OCDE, OCA, OEA, nous connaissons dans ce trièdre l'angle plan COE (supplément de CDE), et les deux coins égaux CO et OE. Done par une construction plane (liv. V, prop. XXVI), nous obtenons l'angle plan COA.

Dans le triangle rectangle COA, nous connaissons donc tous les angles, et de plus l'hypothénuse OA, rayon de la sphère donnée. Construisant ce triangle sur un plan, nous aurons la longueur CA. Décrivant le cercle CA et y inscrivant un pentagone régulier, ce pentagone sera une face du polyèdre cherché et la construction s'achèvera par les propositions I ou III.

ne peuvent avoir pour faces que des triangles équilatéraux, des carrés ou des pentagones réguliers.

(1) S'il s'agit d'un dodécaèdre; sans cela ce serait un demi-angle au centre de triangle équilatéral ou de carré.

LIVRE VIII.

LES TROIS CORPS Ronds.

Définitions. — Voyez Legendre.

LEMES PRÉLIMINAIRES SUR LES SURFACES (1).

Définitions. — La projection d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée du point donné sur le plan.

La projection d'une droite AB sur un plan est la droite qui joint les projections A' , B' de ses deux extrémités.

La projection d'une figure polygonale sur un plan est la figure formée sur ce plan par les projections des côtés du polygone.

Le plan sur lequel on projette une figure s'appelle *plan de projection*.

LEMME 1^{er}.

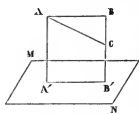
La projection d'une droite AB est égale à AB , si cette droite est parallèle au plan de projection, et moindre que AB dans le cas contraire.

1^o Soit AB parallèle au plan de projection MN .

Le plan des parallèles AA' , BB' , contiendra AB , et ne pourra

(1) Cette théorie était rédigée, lorsque, en parcourant les géométries de MM. Amiot et Cirodde, j'y ai rencontré des lemmes préliminaires basés sur la même idée fondamentale.

couper MN que suivant une parallèle $A'B'$ à AB. La figure $ABA'B'$ est donc un rectangle, donc $A'B' = AB$.



2° Soit AC non parallèle au plan MN. Menons les perpendiculaires AA' , CB' . AC sera oblique par rapport à ces deux droites, sans quoi, étant parallèle à $A'B'$, elle serait parallèle au plan MN (livre V, propos. V). Dès lors la perpendiculaire commune $A'B'$ est moindre que l'oblique AC.

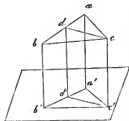
Ainsi, la projection d'une droite est moindre que cette droite, à moins toutefois que celle-ci ne soit parallèle au plan de projection, auquel cas elle se projette en vraie grandeur.

LEMME II.

La projection d'un triangle est moindre que ce triangle, à moins que le plan de celui-ci ne soit parallèle au plan de projection, auquel cas le triangle se projette en vraie grandeur.

1° Dans ce dernier cas d'abord, les trois côtés se projetant en vraie grandeur (lemme I^{er}), le triangle donné et sa projection auront les trois côtés égaux, donc ils seront égaux.

2° Dans le cas contraire, il y aura au moins deux côtés du triangle qui ne seront pas parallèles au plan de projection. Choisissons l'un d'eux ab pour base, et la perpendiculaire cd , abaissée sur lui du sommet opposé, pour hauteur. Le point d se projettera évidemment en d'



sur la projection $a'b'$ (livre V), et $d'c'$ vaudra tout au plus dc (lemme I^{er}). Si maintenant du point c' , j'abaisse la hauteur du triangle $c'a'b'$, cette hauteur sera ou $c'd'$ ou moindre que $c'd'$; donc, à *fortiori*, elle vaudra tout au plus cd . Ainsi, la hauteur de la projection vaut tout au plus la hauteur du triangle dans l'espace. D'ailleurs, sa

base est moindre (lemme I^{er}), donc enfin, la projection d'un triangle

situé dans un plan non parallèle au plan de projection est moindre que ce triangle.

Corollaire. Tout ce que nous venons d'établir pour le triangle s'applique à un polygone quelconque; il suffit pour cela de le décomposer en triangles.

LEMME III.

La projection d'une portion de surface polyédrale est moindre que cette surface.

Car dans le cas le plus défavorable (celui où la portion donnée ne peut être coupée en deux points par une perpendiculaire au plan), cette projection n'est qu'un ensemble de projections de polygones, situés dans des plans différents, et dont l'un au moins ne sera point parallèle au plan de projection; ce dernier sera diminué, et les autres seront tout au plus conservés en vraie grandeur; donc enfin, la projection sera moindre que la surface polyédrale donnée.

LEMME IV.

Toute aire plane est moindre qu'une surface polyédrale s'appuyant sur le même contour.

En effet, suivant tous les côtés qui forment le contour de l'aire plane donnée, menez-lui des plans perpendiculaires. De deux choses l'une, ou ces plans enfermeront toute la surface polyédrale, ou ils ne l'enfermeront pas. Dans le premier cas, l'aire plane n'est autre chose que la projection de la surface polyédrale, et alors nous retombons dans le lemme précédent. Dans le second cas, les plans perpendiculaires détacheront du polyèdre une portion de surface dont l'aire plane sera la projection; cette aire plane sera donc moindre que la portion détachée, et, à *fortiori*, que la surface polyédrale entière.

LEMME V.

De deux surfaces polyédrales convexes s'appuyant sur un même contour, celle qui enveloppe l'autre est la plus grande.

Pour le démontrer, imaginons que l'on prolonge l'une des faces de la surface polyédrale enveloppée jusqu'à ce qu'elle coupe l'enveloppe. L'aire plane ainsi obtenue sera moindre que la portion qu'elle détache de la surface enveloppante (lemme IV). Donc, si l'on remplace cette dernière portion par l'aire plane, on aura changé l'aire enveloppante en une autre plus petite.

Mais il est évident que, si l'on continue cette construction sur chaque face du polyèdre enveloppé, la dernière surface que l'on obtiendra sera ce polyèdre lui-même. D'ailleurs, le polyèdre enveloppant ayant toujours diminué de surface, il était donc, tout d'abord, plus grand que le polyèdre enveloppé. Ainsi, de deux surfaces polyédrales convexes s'appuyant sur un même contour, celle qui enveloppe l'autre est la plus grande.

LEMME VI.

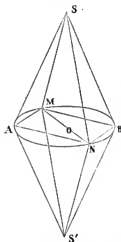
De deux surfaces convexes quelconques s'appuyant sur le même contour, celle qui enveloppe l'autre est la plus grande.

Car, si ces surfaces sont courbes, en totalité ou en partie, la comparaison entre elles n'est intelligible qu'à la condition que l'on remplace les parties courbes par des parties polyédrales d'un nombre infini de faces, qui sont des plans infiniment petits. Or, dès lors, on retombe sur le lemme V (1).

(1) On peut faire ici une remarque analogue à celle que j'ai faite en note, à propos de la proposition IX du livre IV.

• LEMME VII.

La surface convexe du cône est plus grande que celle de toute pyramide inscrite, et moindre que celle de toute pyramide circonscrite.



Soient S et cercle OA le sommet et la base du cône donné; inscrivons-lui une pyramide SMNAB.

Construisons au-dessous de la base un autre cône, absolument identique au cône donné, et soit S' son sommet. La pyramide S'MNAB sera aussi identique, en surface, à la pyramide SMNAB. Joignons S et S' à deux sommets quelconques, M et N, de la base. Sur le contour SMNS' s'appuient de chaque côté une surface enveloppante et une surface enveloppée. La première est, de chaque côté, plus grande que la seconde (lemme VI),

donc, en ajoutant, on voit que la surface totale du double cône est plus grande que la surface totale de la double pyramide. Donc aussi, en prenant les moitiés, la surface convexe du cône proposé est plus grande que celle de toute pyramide inscrite. On démontrera, par un raisonnement et une construction entièrement semblables, que la surface convexe du cône est moindre que celle de toute pyramide circonscrite. M et N seront alors les points de contact de deux côtés quelconques de la base.

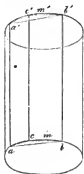
• LEMME VIII.

La surface convexe du cylindre est plus grande que celle de tout prisme inscrit et moindre que celle de tout prisme circonscrit.

Soient un cylindre et un prisme inscrit. Il suffira évidemment de prouver que l'un quelconque des rectangles qui composent la surface convexe du prisme est moindre que la portion cylindrique correspon-

dante, puisque, en ajoutant toutes les inégalités semblables, le théorème sera démontré.

Or, si le rectangle $aba'b'$ n'était pas moindre que la portion cylindrique $amba'm'b'$, il serait plus grand ou égal.



Supposons-le d'abord plus grand et posons

$$aba'b' = amba'm'b' + a,$$

Multiplions cette équation par un nombre entier K , assez grand pour que Ka dépasse le double du segment amb , ce qui est toujours possible, j'aurai alors

$$K \times aba'b' = K \times amba'm'b' + Ka,$$

et par suite, puisque $Ka > 2 amb$,

$$K \times aba'b' > K \times amba'm'b' + 2 amb. (1)$$

Or, si l'on construit un nouveau cylindre ayant même base que le cylindre donné, mais une hauteur K fois plus grande, et si, sur la même corde ab , on construit un rectangle analogue à $aba'b'$, ce rectangle sera évidemment $K \times aba'b'$. La surface cylindrique correspondante pourra se diviser en K parties qui coïncideront avec $amba'm'b'$ et vaudra par suite $K \times amba'm'b'$; d'ailleurs le rectangle étant moindre que la surface totale qui s'appuie sur le même contour, on aura donc

$$K \times aba'b' < K \times amba'm'b' + 2 amb. (2)$$

Or, les deux inéquations (1) et (2) sont contradictoires, donc il est absurde de supposer que le rectangle $aba'b'$ puisse être plus grand que la surface cylindrique correspondante.

Supposons-le égal. Menons ac au hasard, puis construisons les rectangles $aca'c'$, $ccb'c'$. Ces deux rectangles et le rectangle primitif ayant tous même hauteur, sont entre eux comme leurs bases; donc, puisque l'on a

$$ac + cb > ab,$$

l'on aura aussi

$$aca'c' + ccb'b' > aba'b',$$

et puisque, par hypothèse,

$$aba'b' = amba'm'b',$$

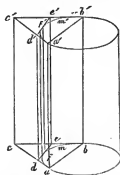
cette inéquation revient à

$$aca'c' + ccb'b' > amba'm'b',$$

mais, pour que la somme de ces deux rectangles dépassât la somme des portions cylindriques aboutissant aux mêmes génératrices, il faudrait que l'un des deux au moins dépassât la portion cylindrique qui lui correspond, ce qui vient d'être reconnu impossible.

Donc enfin le rectangle ne peut, ni dépasser l'aire cylindrique, ni lui être égal, donc il est plus petit. Donc la surface convexe du cylindre est plus grande que celle de tout prisme inscrit.

2° Soient un cylindre et un prisme circonscrit. Il me suffira encore de prouver que la portion cylindrique $amba'm'b'$ est moindre que la somme des rectangles $aca'c'$, $ccb'c'$, puisque alors, par une simple addition, le théorème sera établi.



Or, soit d'abord $amba'm'b' >$ la somme des rectangles, et dans ce cas, construisons, comme plus haut, un cylindre assez grand pour que la différence entre l'aire cylindrique et la somme des deux rectangles dépasse le double de l'aire mixtiligne $ambc$. Dès lors on aura une surface enveloppée (l'aire cylindrique) qui sera plus grande que la surface enveloppante s'appuyant au même contour (les deux rectangles plus les deux portions mixtilignes).

Cette conclusion ne pouvant avoir lieu, la surface cylindrique ne peut déjà pas dépasser l'autre.

Supposons les deux aires égales. Dans ce cas, en un point f , pris sur ab , menons la tangente de ; répétons la construction sur la base supérieure et menons les droites ff' , dd' , ee' .

Puisque $ac + cb > ad + de + eb$, on aura la somme des deux grands rectangles plus grande que la somme des trois petits, ou des quatre petits, si l'on partage le rectangle de' par la génératrice ff' . Donc aussi, la somme des aires cylindriques af , fb est plus grande que la somme des quatre rectangles, mais pour cela il faudrait que l'une au moins de ces aires fût plus grande que la somme des deux rectangles correspondants, ce qui a été démontré impossible.

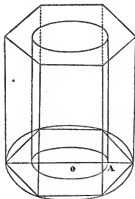
Donc enfin, la surface du cylindre est moindre que celle du prisme circonscrit.

PROPOSITION 1^{re}.

THÉORÈME.

Le volume d'un cylindre a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Je dis que le cylindre dont la base est B et la hauteur H aura pour mesure $BH = \pi R^2 H$.



En effet, cette mesure peut toujours être mise sous la forme πHx , x étant un facteur abstrait, commensurable ou non. Or, je dis que $x = R^2$. Car sans cela il serait plus grand ou plus petit.

1° $x > R^2$. Entre x et R^2 , prenez x' commensurable avec l'unité, et formez un carré équivalent à x' , comme dans la proposition XIII du livre IV; nommons-le y^2 . Nous aurons d'abord $\text{cyl.} > \pi y^2 H$, puis $y^2 > R^2$, ou $y > R$. Portons $OA' = y$, et décrivons le cerc. OA' . Il vaut πy^2 .

Donc $\text{cyl. } OA > \text{cerc. } OA' \times H$. Inscrivez au cerc. OA' un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas le cerc. OA , et sur ce polygone régulier construisez un prisme de hauteur H; ce prisme a pour mesure sa base, plus petite que cerc. OA' , multipliée par H. Donc il serait plus petit que le cylindre OA , ce qui est absurde, puisque le cylindre est contenu dans le prisme. Donc, x ne peut être plus grand que R^2 . Un raisonnement et une construction absolument semblables démontreraient qu'il ne saurait être plus petit. Donc $x = R^2$, et le $\text{cyl.} = \pi R^2 H$.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

La mesure de la surface convexe d'un cylindre est égale à la circonférence de sa base multipliée par sa hauteur.

La démonstration étant absolument analogue à la précédente, en

posant $\text{surf.} = 2\pi H \times x$, et en prouvant que $x = R$, je ne la répéterai pas. Il est bien entendu que la conclusion, au lieu de s'appuyer sur ce que le cylindre donné est renfermé dans le prisme construit, ou réciproquement, s'appuiera sur le lemme VIII.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Le volume d'un cône a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

La démonstration est absolument analogue à celle de la propos. I^{re}.

Il faut poser $\text{vol.} = \frac{\pi H}{3} \times x$, et démontrer que $x = R^2$.

IV. — 6.

PROPOSITION V.

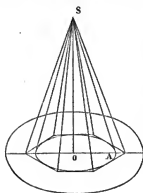
THÉORÈME.

La mesure de la surface convexe d'un cône est égale au produit de la circonférence de sa base par la moitié de son côté.

Je dis que $\text{surf.} = \frac{\text{circ. OA}}{2} \times \text{SA.} = \pi. \text{OA. SA.}$

En effet, si la surface du cône n'était pas égale à cette quantité, elle serait plus grande ou plus petite.

1° Supposons-la plus grande, et soit, s'il est possible, $\pi. \text{SA.} x$ la mesure de la surface, x étant plus grand que OA. Entre OA et x ,



plaçons le nombre abstrait x' , commensurable avec l'unité. La surface du cône sera plus grande que $\pi \text{SA} x'$, mais x' sera plus grand que OA. Avec un rayon $\text{OA}' = x'$, décrivons une circonférence, puis à la circonférence OA circonscrivons un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas l'autre. La surface

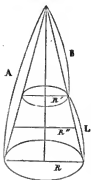
du cône est plus grande que $\pi \text{SA. OA}'$ ou $\frac{\text{SA. circ. OA}'}{2}$.

formée se compose d'une somme de triangles ayant pour hauteur commune y et dont les bases constituent ensemble le périmètre P . La surface pyramidale vaut donc $\frac{Py}{2}$, mais circ. z est moindre que P , donc la surface du cône serait moindre que celle de la pyramide, ce qui est encore contraire au lemme VII. Donc enfin, la surface convexe du cône ne peut être ni plus grande ni plus petite que $\pi OA \cdot SA$. Elle est donc égale au produit de la circonférence de la base par la moitié du côté.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

La surface convexe d'un tronc de cône est égale à son côté multiplié par la demi-somme des circonférences des bases.



Soient R, R' les rayons des bases, $L = A - B$, le côté; je dis que la surface convexe du tronc sera

$$L \times \frac{\text{circ. } R + \text{circ. } R'}{2} = \pi L (R + R').$$

En effet, on a

$$T = \pi RA - \pi R'B = \pi (RA - R'B) = \pi (RA - R'B + RB - RB + R'A - R'A) = \pi R (A - B) + \pi R' (A - B) + RB - R'A = \pi L (R + R') + RB - R'A,$$

mais les triangles semblables donnent

$$A : B = R : R', \text{ d'où } R'A = RB,$$

donc les deux derniers termes se détruisent, et il reste $\pi L (R + R')$, ce qui est la valeur cherchée.

Corollaire. Si l'on mène le rayon moyen R'' , on aura $R + R' = 2R''$, d'où $T = 2\pi LR''$ ou $L \text{ circ. } R''$.

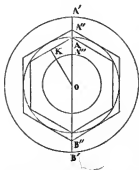
Scholie. Voyez Legendre.

* PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

La surface de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.

Soit OA le rayon de la sphère; je dis que la surface est égale à $2 \cdot OA \cdot \text{circ. } OA = 4\pi OA$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, cette



mesure pourrait toujours être mise sous la forme $4\pi OA x$, et x devrait être plus grand ou plus petit que OA .

1° $x > OA$. Entre OA et x prenons x' commensurable avec l'unité. Nous aurons donc $S > 4\pi \cdot OA x'$ ou $> 2 x' \cdot \text{circ. } OA$. et $x' > OA$. Traçons la *circ.* OA' ou x' et à la *circ.* OA circonserivons un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence extérieure. Plaçons un de ses sommets A'' sur OA , ce qui est facile; on a donc $S > A'B' \cdot \text{circ. } OA$. Imaginons maintenant que le polygone régulier tourne en même temps que le cercle inscrit; il décrira ainsi une surface convexe. Or, si l'on décompose les deux surfaces en bandes s'arrêtant aux cercles de contact, chaque bande de la surface extérieure sera plus grande que la bande correspondante de la sphère (lemme VI), donc la surface totale est aussi plus grande que celle de la sphère. Mais cette surface a pour mesure (prop. VII), $A''B'' \times \text{circ. } OA$, elle serait donc plus petite que la surface de la sphère qui est $> A'B' \cdot \text{circ. } OA$. On voit donc qu'il est absurde de supposer $x > OA$.

2° $x < OA$. Construisons x' comme précédemment. Nous aurons donc $S < 4\pi \cdot OA x'$ ou $< 2 \cdot OA \cdot \text{circ. } x'$. Décrivons cette dernière circonférence et inscrivons à la circonférence OA un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence intérieure. La surface décrite par ce polygone aura pour mesure $2 \cdot OA \cdot \text{circ. } OK$. Elle

serait donc plus grande que la sphère. Or, au contraire, elle est plus petite (lemme VI), donc on voit que x ne peut pas non plus être moindre que OA . Donc enfin, $x = OA$, et $S = 4\pi \overline{OA}^2 = 2 \cdot OA \cdot \text{circ. } OA$.

Scholie. — Voyez Legendre.

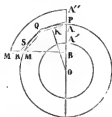
PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

La surface d'une zone sphérique quelconque est égale à la hauteur de cette zone multipliée par la circonférence d'un grand cercle.

Soit d'abord une zone à une base AM ; je dis que sa mesure est $AB \text{ circ. } OA$ ou $2\pi \cdot AB \cdot OA$.

En effet, dans le cas contraire, sa mesure serait plus petite ou plus grande.



1° Supposons-la plus petite, par exemple $2\pi \cdot ABx$, x étant plus petit que OA . Entre les nombres abstraits OA et x , prenons x' commensurable avec l'unité; nous aurons $S < 2\pi ABx'$, ou $< AB \text{ circ. } x'$ et $x' < OA$. Décrivons la circonférence ox' ou OA' , et à l'arc AM inscrivons une portion de polygone

régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence intérieure. La mesure de la surface décrite par cette portion sera (propos. VII) $AB \cdot \text{circ. } OK$, donc elle serait plus grande que le segment sphérique. Or, au contraire, elle est plus petite (lemme VI), donc déjà la mesure ne peut être moindre que $2\pi \cdot AB \cdot OA$.

2° Supposons-la plus grande, par exemple, $2\pi \cdot OA \cdot x$, x étant plus grand que AB .

Entre AB et x , prenons x' , nous aurons $S > 2\pi \cdot OA \cdot x'$, $x' > AB$. Portons $BA'' = x'$, et décrivons la circonférence OA'' qui coupe la corde BM en M' . À l'arc AM , circonscrivons une portion de polygone régulier PQR , dont les côtés ne rencontrent pas le cercle OA'' . La mesure de la surface décrite par cette portion sera $2\pi PB \cdot OA$, donc cette surface serait plus petite que le segment sphérique. Or, au contraire, elle est plus grande, car si on mène la perpendiculaire MS , la

surface PQSM enveloppant complètement le segment sera plus grande (lemme VI).

Or, pour passer de celle-là à la surface extérieure il faut remplacer la surface cylindrique SM ou $2\pi \cdot MB \cdot SM$ par la surface troncconique RS ou $2\pi \cdot \frac{MB+RB}{2} \cdot RS$, quantité évidemment plus grande (1)

Donc, la surface ne peut être non plus plus grande que $\pi \cdot AB \cdot OA$; donc, enfin, elle est égale à ce produit ou à $AB \text{ circ. } OA$.

Si nous considérons maintenant une zone à deux bases, H et H' étant les hauteurs des deux zones simples, dont elle est la différence, on aura d'après ce qui précède

$$S = H \text{ circ. } OA - H' \text{ circ. } OA = (H - H') \text{ circ. } OA.$$

Or, H — H' étant la hauteur de la zone à deux bases, le théorème est donc établi dans tous les cas.

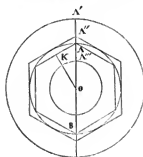
X-XII. — 12-14.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Le volume de la sphère a pour mesure les deux tiers du produit de son diamètre par la surface d'un grand cercle ou $\frac{4}{5}\pi R^3$.

Je dis que la sphère OA a pour mesure $\frac{4}{5}\pi R^3$. En effet, dans le cas contraire, cette mesure serait plus grande ou plus petite.



Supposons-la d'abord plus grande, et mettons-la sous la forme $\frac{4}{5}\pi R^3 x$, x étant plus grand que R. Entre R et x , prenons x' , nous avons

$$x' > R, V > \frac{4}{5}\pi R^3 x'.$$

Décrivons la circonférence x' ou OA', et à la circonférence OA circonscrivons

(1) Ce développement était nécessaire, car le présent cas ne rentrerait pas directement dans le lemme.

un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence extérieure. Le volume décrit par ce polygone sera $\frac{4}{3} \pi R^3 OA''$ (proposition XII), donc ce volume serait plus petit que la sphère; or, au contraire, il est plus grand, puisqu'il la contient, donc déjà le volume n'est pas plus grand que $\frac{4}{3} \pi R^3$.

2^o Supposons-le plus petit, et mettons-le sous la forme $\frac{4}{3} \pi R x$, x étant plus petit que R^2 . Entre les nombres abstraits R^2 et x , plaçons x' commensurable avec l'unité, et construisons, comme il est dit (livre IV, proposition XIII) un carré $y^2 = x'$, puis du point O comme centre avec y ou OA''' comme rayon, décrivons un cercle. On a

$$V < \frac{4}{3} \pi R x' < \frac{4}{3} \pi R \cdot \overline{OA'''}^2 < \frac{2}{3} \cdot AB \cdot \text{cercle} \cdot OA'''.$$

Au cercle OA inscrivons un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas le cercle intérieur, le volume décrit par ce polygone a pour mesure $\frac{2}{3} \cdot AB$ cercle OK (proposition XII), donc il serait plus grand que la sphère; or, au contraire, il est plus petit, puisqu'il y est contenu, ainsi le volume ne peut non plus être moindre que $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Donc enfin, le volume de la sphère de rayon R vaut $\frac{4}{3} \pi R^3$; ou les $\frac{2}{3}$ du produit du diamètre par la surface d'un grand cercle.

* *Scholie.* La quantité $\frac{4}{3} \pi R^3$ peut se décomposer ainsi : $4 \pi R^2 \times \frac{1}{3} R$.

Où a vu (proposition VIII) que la surface de la sphère est $4 \pi R^2$. Donc on peut dire encore que le volume de la sphère a pour mesure le produit de sa surface par le tiers de son rayon.

PROPOSITION XIV

THÉORÈME.

Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure les deux tiers du produit de la projection de son arc sur l'axe, multipliés par la surface d'un grand cercle.

Premier cas. Supposons que le secteur ait pour base une calotte sphérique ; dans ce cas, la démonstration n'offrant absolument aucune différence avec la précédente, je m'abstiendrai de la répéter.

Deuxième cas. Supposons que le secteur sphérique, étant engendré par un arc n'aboutissant pas à l'extrémité de l'axe, soit la différence de deux secteurs ordinaires.

Soient H et H' les hauteurs de ceux-ci, on aura

$$V = \frac{2}{3} H \times \pi R^2 - \frac{2}{3} H' \pi R^2 = \frac{2}{3} (H - H') \pi R^2,$$

et comme H — H' est encore la hauteur du secteur donné, on voit que la formule s'applique également à celui-ci.

* *Scholie I.* Le produit $\frac{2}{3} \pi R^2 H$ peut se décomposer en $2 \pi R H \times \frac{1}{3} R$. Or, $2 \pi R H$ étant la surface de la zone sphérique qui sert de base au secteur (proposition IX), on peut dire que tout secteur sphérique a pour mesure le produit de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon.

Scholie II. Si l'on appelle D le diamètre de la sphère, et que dans la formule $V = \frac{4}{3} \pi R^2$, on remplace R par sa valeur $\frac{D}{2}$, il vient

$$V = \frac{1}{6} \pi D^3.$$

* XV. — 16.

XVI-XVII. — 17-18.

NOTES ET ÉCLAIRCISSEMENTS.

NOTE 1^{re}.

De l'infiniment petit en géométrie. — Remarques sur les propositions XXIV, XXV, XXVI et XXVII du livre I^{er}. — Complément de la théorie des parallèles.

Je crois nécessaire d'exposer ici mes idées sur l'emploi de l'infiniment petit en géométrie, et d'expliquer en quel sens j'entends que cet emploi a été banni de mes méthodes, et spécialement de la théorie des parallèles.

L'infiniment petit peut se présenter en géométrie de trois manières différentes :

- 1° comme moyen de *compréhensibilité*.
- 2° " " de *démonstration*.
- 3° " " de *contradiction*.

1° L'infiniment petit se présente comme moyen de *compréhensibilité* lorsqu'on veut évaluer les lignes courbes et les surfaces courbes en fonction des mêmes unités que les lignes droites et les plans. Ce cas a été suffisamment développé dans la préface. Lorsqu'on le rencontre, il faut évidemment, ou rejeter la question proposée comme incompréhensible, ou bien la résoudre dans le sens de l'énoncé en

admettant les quantités infiniment petites. Je ne m'occuperai plus de ce premier cas, qui ne peut donner lieu, je pense, à aucune controverse.

2° L'infiniment petit, moyen de *démonstration*, se présente lorsque, explicitement ou implicitement, le géomètre introduit dans son raisonnement ou dans ses calculs des quantités qu'il déclare infiniment petites, ou qui se trouvent ne pouvoir assumer aucune valeur finie, bien que le géomètre ne l'ait pas déclaré d'avance.

C'est ce genre d'infiniment petit que j'ai cherché et, je l'espère, réussi à faire disparaître.

Un grand nombre de démonstrations en apparence infinitésimales, peuvent être changées en démonstrations par l'absurde, au moyen d'une simple addition de quelques mots; par exemple, la première partie de la proposition XIX de Legendre, qui m'a servi à établir ma proposition XXV. Il en est ainsi chaque fois que l'infiniment petit n'apparaît que dans le résultat final, mais ce serait une erreur de croire qu'on puisse toujours effectuer une transformation semblable.

3° L'infiniment petit, moyen de *contradiction*. Il importe de ne pas le confondre avec le précédent. Lorsque le géomètre établit un théorème, il ne peut empêcher son contradicteur de supposer que l'une des quantités soumises au calcul devienne infiniment petite. Il suffit alors que la démonstration subsiste encore dans cette hypothèse. Si le géomètre, par exemple, divise une quantité A en deux, puis en quatre, etc, jusqu'à obtenir un quotient moindre qu'une autre quantité B, ce qui est toujours possible, et si le contradicteur suppose B infiniment petit, il est clair que le géomètre est autorisé à continuer la division indéfiniment, et devra toujours finir par dépasser B, quelque petit que B ait été choisi. Pour en citer un seul exemple, dans la proposition XXIII du livre I^{er} de Legendre, proposition que l'on n'a jamais songé à attaquer, la construction doit se prolonger indéfiniment si le contradicteur suppose l'angle DFG infiniment petit.

Ainsi que je l'ai dit déjà, le but que je me suis proposé en réformant la théorie des parallèles a été d'en faire disparaître l'infiniment petit, moyen de démonstration.

Je vais, dans la suite de cette note, établir que la théorie donnée

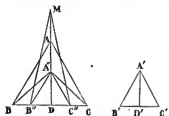
dans le texte satisfait à cette condition, et, en même temps, présenter un complément de cette théorie.

J'ai dit plus haut que l'infiniment petit, moyen de démonstration, peut se présenter lorsqu'une quantité ne pouvant assumer aucune valeur finie s'introduit dans le calcul, bien que le géomètre ne l'ait pas déclaré à l'avance.

Il faut donc, afin de rendre la théorie rigoureuse, examiner si la quantité M , introduite dans le livre I^{er}, est bien une quantité finie.

A cet effet, je vais établir d'abord le lemme suivant :

Étant donnés deux triangles équilatéraux, la somme des angles du plus petit vaut au moins la somme des angles du plus grand.



Soient les triangles équilatéraux ABC , $A'B'C'$; soit $AB > A'B'$, et appelons α la somme des angles de ABC , je dis que celle des angles de $A'B'C'$ vaudra au moins α .

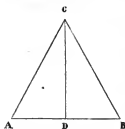
Pour le prouver, abaissons les perpendiculaires AD , $A'D'$ sur les milieux D et D' des bases BC , $B'C'$, puis portons le petit triangle sur le grand, $B'C'$ tombant dans la direction BC , et D' en D . B' et C' tomberont quelque part en B'' et C'' sur le côté BC , et la perpendiculaire $D'A'$ tombera dans la direction DA . Examinons où tombera le point A' . D'abord il ne saurait tomber en M , au delà de A , car alors on aurait (livre I^{er}, proposition XII) $B'' > B$, et $\frac{M}{2} < \frac{A}{2}$, ou $M < A$; d'ailleurs, comme $A = B$, il s'ensuit que B'' serait plus grand que M , et le triangle $B''C''M$ ne serait pas équilatéral. Pour le même motif, A' ne peut tomber en A , donc enfin il tombe en A'' , entre A et D . Joignons $A''B$, $A''C$.

La somme des angles de ABC étant α , en y ajoutant les quatre droits formés autour de A'' et les quatre droits formés en B'' et C'' , on voit que la somme des angles des cinq triangles $AA''B$, $AA''C$, $A''BB''$, $A''CC''$, $A''B''C''$, vaut exactement $\alpha + 8$, mais la somme des angles des quatre premiers vaut tout au plus 8 (livre I, proposition XXV)(1),

(1) La proposition XXV du livre I^{er} étant en dehors de cette discussion, je la suppose établie.

donc la somme des angles de $A''B''C''$ ou de $A'B'C'$ vaut au moins α . Ainsi, étant donnés deux triangles équilatéraux, la somme des angles du plus petit vaudra au moins la somme des angles du plus grand.

Considérons actuellement un triangle équilatéral ABC , dont les côtés ne soient pas infiniment petits. La somme de ses angles est évidemment une quantité visible, appréciable, finie.



Faisons varier le côté AB de manière à engendrer tous les triangles équilatéraux possibles, et commençons par le diminuer. Si cette opération change la somme des angles, ce ne pourra être qu'en plus, en vertu du lemme précédent, donc il n'est pas à craindre que l'infiniment petit puisse s'introduire.

Remarquons maintenant que dans le triangle CAD , on a $CD > CA - AD > AD$; pour obtenir l'angle A du triangle CAB , il faut donc porter sur l'un de ses côtés une longueur AD , mener en D une perpendiculaire au côté, et sur cette perpendiculaire prendre une longueur DC plus grande que AD ; or, une construction semblable fournira toujours en A un angle fini, appréciable, visible. Si donc le côté croît, les angles du triangle resteront toujours finis, et par suite leur somme elle-même ne pourra devenir infiniment petite. Au premier abord, on pourrait objecter que, d'après le lemme établi plus haut, le triangle qui aura la moindre somme d'angles sera le plus grand de tous, et que, par suite, il faudra aller jusqu'à l'infini pour obtenir la quantité M . Mais cette difficulté n'est qu'apparente, car il est évident que le raisonnement des propositions XXIV et XXVI subsisterait encore, et à *fortiori*, si M , au lieu d'être la somme des angles du triangle dans lequel cette somme est minimum, était une quantité moindre que toutes les sommes d'angles. Or, étant donné un nombre quelconque de quantités devant rester toujours finies, on peut toujours trouver un nombre fini moindre que toutes ces quantités.

Un exemple éclaircira ce raisonnement.

Prenons la suite

$$1, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right), 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right), \text{ etc.}$$

Il ne serait pas vrai de dire que, parmi toutes ces quantités, il y en aura une qui sera moindre que toutes les autres, car elles vont toujours en diminuant; mais il est vrai de dire que l'on peut prendre une quantité $M \left(\frac{1}{4} \text{ par exemple} \right)$ plus petite que toutes ces quantités.

Si le même raisonnement n'est pas applicable à la suite,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \text{ etc.,}$$

c'est précisément parce que les termes de cette progression descendent jusqu'à l'infiniment petit.

En résumé, M est donc une quantité finie, existant réellement.

On voit que ma théorie est basée sur cette idée qu'un angle A formé en menant une perpendiculaire à l'extrémité B d'une droite AB , en portant sur cette perpendiculaire une longueur BC , plus grande que la première droite, et en joignant les deux extrémités A et C ; que cet angle A , dis-je, ne peut devenir moindre que toute quantité donnée.

On pourrait donc croire, avec une grande apparence de raison, que la théorie devrait nécessairement tomber par cela seul que l'on rejetterait cette idée fondamentale, et que l'on admettrait qu'à mesure que le côté d'un triangle équilatéral augmente, la somme de ses angles diminue, jusqu'à devenir moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit.

Si, par exemple, pour combattre ma théorie, le contradicteur objectait que, pendant que les côtés d'un triangle équilatéral deviennent

$$a, 2a, 4a, \text{ etc.,}$$

l'angle de ce triangle pourrait devenir

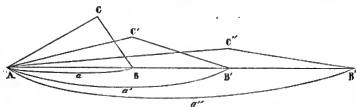
$$M', \frac{M'}{2}, \frac{M'}{4}, \text{ etc.,}$$

et n'avoir, par conséquent, aucune limite inférieure assignable, l'objection, à première vue, semblerait péremptoire.

Elle ne l'est pas cependant, et c'est ce que l'analyse suivante va montrer.

Considérons d'abord un triangle posé comme celui de la proposi-

tion XIX de Legendre ou de ma proposition XXV, et appliquons-lui deux fois la construction indiquée dans ces propositions. Nommons les trois bases successives a, a', a'' . Nous avons $a'' < AC'' + C''B''$, mais, d'après la construction, $AC'' = AB' = a'$, et $C''B'' = AC' = AB = a$,



donc $a'' < a' + a$, et cette inéquation se répètera dans la suite des triangles ; d'ailleurs $a' < 2a$, donc les bases croissent moins rapidement que les termes de la série

$$a, 2a, 5a, 8a, \dots$$

On sait d'ailleurs qu'en même temps les angles en A ont décreu plus rapidement que les termes de la progression

$$A, \frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \frac{A}{8}, \frac{A}{16};$$

De la comparaison des cinquièmes termes de ces deux séries je conclus eet énoncé : Étant donné un triangle, je pourrai en construire un autre ayant même somme d'angles, et tel, que son plus grand côté sera devenu tout au plus 8 fois plus grand et son plus petit angle au moins 16 fois plus petit.

Cela posé, soit, s'il est possible, $2 - x$, la somme des angles du triangle proposé, et soit x' la puissance de 2 immédiatement supérieure à $\frac{2}{x}$.

Sur la droite ayant pour longueur $x'a$, construisons un triangle équilatéral et appelons M' l'angle de ce triangle.

Supposons d'abord $A < M'$ et appliquons au triangle proposé la construction du 1^{er} cas de la proposition XXVI ; il est évident que cette construction réussira tant que la base ne dépassera pas $x'a$, puisque, jusqu'à cette limite, les angles des triangles équilatéraux vaudront au moins M' , donc seront plus grands que A ; mais la base ne dépassera jamais $x'a$; en effet, lorsque la base sera $2a$, la somme des

angles sera tout au plus $2 - 2x$, et ainsi de suite, donc, quand la base sera $x'a$, la somme des angles sera tout au plus $2 - x'x$; d'ailleurs $x' > \frac{2}{x}$, $x'x > 2$, ainsi cette somme sera déjà négative, et l'on pourra arrêter la construction. Il sera prouvé alors que $2 - x$ ne peut représenter la somme des angles de ABC, donc que cette somme vaut exactement 2° .

On voit que, si l'on admet que A soit plus petit que M' ou égal à M', angle du triangle équilatéral que nous venons de construire, le théorème est démontré.

Supposons donc $A > M'$.

Admettons maintenant, avec notre contradicteur, qu'en faisant croître les côtés du triangle équilatéral d'après la progression

$$x'a, 2x'a, 4x'a,$$

l'angle décroisse d'après la progression

$$M', \frac{M'}{2}, \frac{M'}{4}, \text{etc.}, \dots$$

Construisons, avec le triangle donné, des triangles satisfaisant aux conditions de l'énoncé que nous avons établi plus haut. Leurs angles seront tout au plus

$$A, \frac{A}{16}, \frac{A}{16^2}, \text{etc.},$$

leurs côtés tout au plus

$$a, 8a, 8^2a, \text{etc.},$$

Si, pour chacun de ces triangles, je construis, comme ci-dessus, un triangle équilatéral, les côtés de ces derniers seront tout au plus

$$x'a, 8x'a, 8^2x'a \dots (1)$$

et, par suite, leurs angles tout au moins,

$$M', \frac{M'}{8}, \frac{M'}{8^2}, \text{etc.},$$

Or, du moment qu'un angle en A sera plus petit que l'angle en M'

(1) x' est le même que plus haut, puisque la somme des angles n'a pas changé.

correspondant, la somme des angles, d'après ce qui précède, vaudra 2° dans le triangle où ce fait se présentera, et, par suite, dans tout triangle, en vertu du théorème de Legendre cité à la page 15.

Donc enfin, pour que le théorème soit rigoureusement démontré, il faut et il suffit qu'on ait l'inéquation

$$\frac{A}{16^p} < \frac{M'}{8^p}$$

p étant aussi grand que l'on voudra. Or, cette inéquation revient à

$$\begin{aligned} \frac{A}{8^p \cdot 2^p} &< \frac{M'}{8^p} \\ 2^p &> \frac{A}{M'} \\ p &> \frac{\log A - \log M'}{\log 2}. \end{aligned}$$

Comme on pourra toujours choisir p plus grand que cette valeur, toute difficulté est levée.

Pour peu que l'on réfléchisse sur la démonstration qui précède, on voit qu'elle n'est point particulière à l'espèce de décroissance que j'ai supposée, mais je n'entrerai point à ce sujet dans de longs détails analytiques : il me suffira d'avoir réfuté l'objection sous la forme qui se présentait le plus naturellement.

NOTE II.

Sur la proposition XIX du livre I^{er} de Legendre.

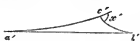
Ainsi que je l'ai dit dans la préface, cette proposition constituerait la solution la plus complète de la théorie des parallèles, si elle ne renfermait pas un point douteux, ou, pour mieux dire, un véritable postulat. Voici en quoi il consiste. Lorsque l'auteur en arrive à son dernier triangle $a'b'c'$, il nous dit : la somme des angles sera toujours



$$S = a' + b' + c' = a' + b' + 2 - x' = 2 + a' + b' - x'.$$

a' et b' sont moindres que toute quantité donnée, et l'auteur les supprime, mais il supprime la quantité x' pour la même raison, et là git le vice de sa théorie.

Pourquoi x' est-il infiniment petit? On me répondra : Parce que $a'c'$ et $b'c'$ sont sensiblement couchées l'une sur l'autre; mais n'est-il pas évident que c'est admettre implicitement que l'angle x' vaut la somme des angles a' et b' , c'est-à-dire admettre ce qu'il s'agit, en définitive, de démontrer? Legendre a dit que la difficulté de la théorie des parallèles consiste en ce que l'on ne parvient pas à trouver à la ligne droite une propriété qui différencie sa forme de celle d'une hyperbole. Or, si l'on traçait les lignes $a'c'$ et $b'c'$ en forme d'hyperboles,



comme dans la figure ci-contre, à quoi verrait-on que l'angle x' est infiniment petit? On ne pourrait pas le prouver, et

cela indique clairement qu'on ne le prouvait pas davantage tout à l'heure, et que la figure, au lieu de guider le raisonnement, l'égarait en lui faisant admettre comme évident un fait indémontré et indémontrable. Pour rester dans le vrai, la somme des angles se réduit, non pas à 2, comme dans Legendre, mais à $2 - x'$. Donc, ainsi que je le dis dans la préface, il est parfaitement prouvé que la somme des trois angles ne peut dépasser 2° , mais nullement qu'elle doit atteindre cette valeur. D'ailleurs, s'il paraît évident à l'auteur que x' doit devenir moindre que toute quantité donnée, il doit admettre, à *fortiori*, qu'il deviendra moindre que $2 - 2c$, quantité positive et finie, si c est aigu; dès lors on aura

$$a + b + c > 2 - x' > 2 - (2 - 2c) > 2c, \quad a + b > c;$$

j'en conclus que tout angle aigu d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres angles. Dès lors, si nous considérons deux triangles rectangles isocèles égaux ADB, ADC, juxtaposés, on aura



$A = B + C$, donc A devra être droit, car s'il était obtus, la somme des angles de ABC serait plus grande que 2° , et s'il était aigu, il devrait être plus petit que $B + C$. A étant droit, et valant le

double des angles à la base des triangles rectangles isocèles donnés, on voit que la somme des angles d'un triangle rectangle isocèle vau-

draît 2°. Mais cette remarque revient au fond à la démonstration précédente, et en rejetant l'une, on rejette l'autre. C'est pourquoi j'ai eu soin de dire que je n'admets pas moi-même cette considération.

NOTE III.

Sur les propositions XV du livre II, III du livre III, etc.

Ces propositions reposent sur l'égalité absolue de deux fractions continues, dans lesquelles tous les quotients incomplets que l'on trouve successivement doivent rester toujours identiques.

Cette égalité est aussi évidente pour ces deux fractions que pour deux fractions décimales dans lesquelles toutes les décimales successives resteraient toujours identiques. Aussi M. Mutel, auteur de cette théorie, n'y a-t-il rien ajouté, la considérant comme inattaquable.

Deux remarques m'ont décidé à y ajouter un développement; la première, c'est que, à quelque quotient incomplet qu'on s'arrête, il reste deux fractions complémentaires dont il faut prouver l'égalité; la seconde, c'est que, dans une fraction décimale, on voit immédiatement à partir de quelle décimale devrait se manifester la différence, s'il y en avait une, et que cela se voit beaucoup moins dans une fraction continue.

Supposons donc qu'entre les deux fractions M et N, dont tous les quotients incomplets sont les mêmes, quelque loin qu'on en pousse l'évaluation, il puisse exister une différence m , j'aurais $M - N = m$; calculons les réduites consécutives de M et N; ces réduites seront les mêmes des deux côtés, puisqu'elles ne se forment que par les quotients incomplets. Si nous prenons maintenant la différence entre deux réduites consécutives, son numérateur sera toujours 1, et son dénominateur ira toujours en augmentant; donc cette différence finira nécessairement par devenir moindre que m .

Arrêtons-nous à ce point dans les deux fractions; comme la vraie valeur de la fraction continue est toujours comprise entre deux réduites consécutives, M et N seront tous deux compris entre deux quantités dont la différence sera moindre que m ; or, cela est absurde, puisque

$M - N = m$; donc on voit que cette hypothèse, conduisant à un résultat absurde, est absurde elle-même.

Donc, les deux fractions sont rigoureusement égales.

NOTE IV.

PROBLÈME.

Étant admis que, dans un triangle isocèle rectangle, la somme des angles vaut 2° , démontrer, sans aucune autre proposition préliminaire, qu'il doit en être de même dans un triangle quelconque (1).

I. *Lorsqu'un quadrilatère a trois angles droits et deux côtés adjacents égaux, le quatrième angle est droit aussi et les quatre côtés sont égaux.*

Soient B, C, D, des angles droits, et $BC = CD$; le triangle BCD étant isocèle rectangle, les angles b et d sont de 45° , donc b' et d' sont aussi de 45° , donc les triangles BCD, BAD, sont égaux (livre I^{er}, proposition VII), donc toutes les parties de l'énoncé sont démontrées.

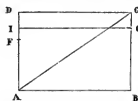
II. *Lorsque, dans un quadrilatère, trois angles sont droits, le quatrième l'est aussi, et les côtés opposés sont égaux.*

Soient A, B, C, des angles droits, et supposons d'abord qu'entre AB et BC, on connaisse une commune mesure BE, qui entre, par exemple, trois fois dans la base et deux fois dans la hauteur. En tous les points de division menons des perpendiculaires et marquons les points d'intersection.

Dans le quadrilatère FBEH, on a $FB = BE$, et les angles F, B, E,

(1) J'ai prévenu, dans la préface, que le contenu de cette note ne doit être considéré que comme un exercice géométrique. Il faut se souvenir aussi, dans le courant de la solution, que l'on n'admet aucune proposition préliminaire.

sont droits, donc H est droit, et $HE = EB$; passant au quadrilatère supérieur, on verra que K est droit et que $KH = HE$. On prendra alors le quadrilatère $IGFH$, et on remontera ainsi de proche en proche jusqu'à $MILD$, où l'angle D sera démontré être droit. De plus, les côtés opposés se trouvant partagés en un même nombre de parties toutes égales entre elles, la seconde partie de l'énoncé est aussi établie pour ce cas.

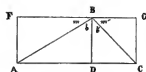


Admettons maintenant qu'on ne connaisse pas de commune mesure entre les deux côtés. Je dis d'abord que les côtés opposés sont égaux, car si AD et BC ne sont pas égaux, soit AD le plus grand et portons $AF = BC$; divisons AB en parties égales plus petites que FD , puis portons ces parties sur AD à partir de A ; il tombera au moins un point de division I entre F et D . Menons en I une perpendiculaire à AD . Devant sortir du rectangle, elle rencontrera BC en G .

Or, dans le quadrilatère $IABG$, les angles I, A, B , sont droits, et entre les côtés adjacents AB, AI , on connaît une commune mesure; donc en vertu du premier cas $AI = BG$, mais $AI > AF > BC$, et $BG < BC$, donc il est absurde de supposer que les côtés AD, BC , soient inégaux.

Donc, $AD = BC$, et, de même $AB = CD$; alors, si l'on joint AC , les triangles ACD, ACB , ont les trois côtés égaux, donc $D = B = 1^\circ$. Donc enfin, si dans un quadrilatère quelconque trois angles sont droits, le quatrième l'est aussi et les côtés opposés sont égaux.

III. Dans tout triangle la somme des trois angles vaut 2° .



Soit un triangle ABC . Menons la perpendiculaire BD , les perpendiculaires AF, CG ; du point B abaissons sur ces dernières lignes les perpendiculaires BF, BG , les deux angles en B seront droits d'après ce qui a été démontré plus haut. Or, l'égalité des triangles ABD, ABF donne $A = m$, donc $A + b = m + b = 1^\circ$, de même $C + b' = 1^\circ$, ou, ajoutant

$$A + C + b + b' = A + B + C = 2^\circ.$$

NOTE V.

Sur deux démonstrations directes de la théorie des parallèles.

Il existe deux démonstrations directes de la théorie des parallèles qui n'ont pu être classées dans la préface (1); l'une est due à M. Lamarle et l'autre à M. Gergonne.

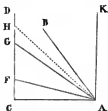
M. Lamarle prouve que la ligne équidistante d'une droite est elle-même une droite, en montrant que si cette ligne était courbe, l'existence de cette courbe impliquerait un mode de génération où la tangente devrait intervenir par une rotation continue et il démontre que cette rotation continue est impossible ou nulle.

Cette démonstration est excessivement ingénieuse, mais elle est toute matérielle, et, lors même qu'on ferait abstraction du fil que l'auteur y fait intervenir, l'idée d'une ligne droite s'enroulant sur une courbe ne pourra jamais être admise dans la géométrie, comme moyen de démonstration d'une propriété de la ligne droite.

Il m'est impossible de donner ici la démonstration de M. Lamarle, qui forme une brochure (2); c'est, à mon avis, un travail savant et consciencieux, mais non pas une véritable solution de la question.

Voici maintenant le fond de la démonstration de M. Gergonne :

Si l'oblique AB ne rencontrait pas la perpendiculaire CD, comme, d'ailleurs, il existe des droites partant de A, telles que AF, qui rencontrent CD, il devrait donc, entre AF et AB, en exister une dernière qui la rencontrât; soit AG cette dernière. Je pourrai toujours prendre un point H au-dessus de G et joindre AH; on voit alors que AG ne serait pas la



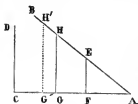
(1) A la rigueur, il en existe plus de deux; mais les autres reviennent à admettre l'objet en question.

(2) Démonstration du postulat d'Euclide, par M. E. Lamarle; Bruxelles, chez Decq, 1857.

dernière; donc l'hypothèse, ayant conduit à un résultat absurde, est absurde elle-même; donc AB doit rencontrer CD.

Lorsque la démonstration est présentée de cette manière, il suffit, pour la renverser, de remarquer que le même raisonnement prouverait que la perpendiculaire AK va aussi rencontrer la perpendiculaire CD.

Mais on peut transformer la démonstration comme suit :



Du point E, abaissons une perpendiculaire EF sur CA. Puisqu'il existe des perpendiculaires, telles que FE qui vont rencontrer AB, si CD ne la rencontre plus, il y aura, entre F et C une dernière perpendiculaire qui la rencontrera. Soit GH cette perpendiculaire. Il me sera toujours permis de prendre un point H' au-dessus de H, et d'abaisser la perpendiculaire H'G'. On voit alors que HG n'est pas la dernière, donc l'hypothèse, ayant conduit à un résultat absurde, est fausse elle-même. Donc CD doit rencontrer AB.

L'objection que je posais tout à l'heure n'est plus possible lorsque la démonstration de M. Gergonne est présentée de cette manière; mais, malgré cela, ce mode de démonstration soulève des objections très-graves et ne peut être considéré comme une solution de la question. Je me bornerai à faire remarquer ici que, si le contradicteur admet que toutes les perpendiculaires situées à droite de CD rencontrent l'oblique et que CD soit la première qui ne la rencontre plus, le raisonnement est en défaut.

NOTE VI.

Sur la proposition V du livre VIII.

J'ai admis, dans le courant de cette proposition, que l'on puisse toujours construire deux droites y et z telles que l'on ait

$$yz = SA \cdot OA', \quad y^2 - z^2 = OS^2.$$

Je vais prouver la possibilité de cette construction. Posons $OS = a$,

et construisons une moyenne proportionnelle b entre SA et OA', nous aurons

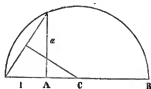
$$yz = b^2, y^2 - z^2 = a^2;$$

la première donne $z = \frac{b^2}{y}$, d'où, en remplaçant dans la seconde,

$$y^2 - \frac{b^4}{y^2} = a^2, \text{ ou } y^4 - b^4 = a^2 y^2,$$

$$\text{ou } y^4 - a^2 y^2 = b^4, y^2 = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} + b^4}.$$

Le signe — doit évidemment être écarté. Pour trouver un carré équivalent au radical, construisons d'abord des lignes droites a' et b'



s'exprimant par a^2 et b^2 en nombres abstraits. Pour cela, sur une perpendiculaire en A à AB, portons a ; à gauche de A portons l'unité de longueur, au milieu de la droite qui joint les deux extrémités, menons une perpendiculaire

qui rencontre AB en C, et du point C comme centre décrivons un cercle passant par les deux extrémités. Je dis que $AB = a^2$; en effet, on a, en nombres abstraits (livre III, proposition XXIV)

$$a^2 = 1 \times AB = AB,$$

ou $AB = a^2$, donc AB est la valeur de a' . On construirait de même b' .

On a alors

$$y^2 = \frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a'^2}{4} + b'^2};$$

le radical se construira par le procédé connu et avec le résultat c' on construira un carré d'^2 d'après la construction inverse de celle que

je viens d'effectuer; on aura alors $y^2 = \frac{a^2}{2} + d'^2$, carré aisé à con-

struire, et dont le côté sera la valeur de y . Une troisième proportionnelle à y et à b donnera z . On voit donc que non-seulement y et z existent, mais que ces lignes sont constructibles par la règle et le compas.

NOTE VII.

Sur la détermination de la quantité π .

La géométrie élémentaire fournit six méthodes principales pour déterminer la valeur de la quantité π . Ces méthodes sont les suivantes :

I. Connaissant le périmètre d'un polygone régulier inscrit à un cercle donné, un calcul très-simple fournit celui du polygone régulier circonscrit semblable.

D'un autre côté, inscrivant à un cercle un polygone régulier quelconque, le calcul fournit aussi le côté et par suite le périmètre du polygone régulier d'un nombre double de côtés. On voit donc qu'on pourra calculer successivement les périmètres des polygones inscrits et circonscrits de n , $2n$, $4n$, etc., côtés. Ces périmètres se rapprochant toujours, et la circonférence étant comprise entre eux, on pourra arriver à trouver approximativement sa longueur. Ce procédé est fort simple, sous le rapport des idées, mais les formules qu'il fournit sont incommodes pour le calcul.

II. On peut employer une méthode analogue en calculant les aires au lieu des périmètres; les formules auxquelles on arrive sont tout aussi compliquées, mais il faut remarquer que cette seconde méthode a l'avantage de calculer directement l'aire du cercle sans passer par la circonférence.

Les deux solutions qui précèdent peuvent se simplifier au moyen du problème suivant : connaissant les aires et les périmètres de deux polygones réguliers inscrits de n et de $2n$ côtés, trouver l'aire et le périmètre du polygone régulier inscrit de $4n$ côtés.

III. Connaissant les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un cercle, on cherche ceux des deux polygones inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.

On calcule directement les périmètres des carrés inscrit et circonscrit, puis du carré on passe à l'octogone régulier, etc. Les deux quantités exprimant, l'une le périmètre du polygone inscrit, l'autre le périmètre

du polygone circonscrit, vont toujours en se rapprochant, et la circonférence du cercle devant toujours être comprise entre eux, on obtiendra sa longueur avec tel degré d'approximation que l'on voudra. Divisant cette longueur par $2R$, on aura la valeur de π . Cette méthode a le même inconvénient que la première, mais donne des résultats beaucoup plus simples que ceux des n^{os} I et II.

IV. Si, au lieu de comparer les périmètres, on compare les aires, ce qui constitue la première méthode de Legendre, on obtient, comme on l'a vu dans le cours, les formules

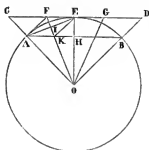
$$A' = \sqrt{AB}, \quad B' = \frac{2AB}{A + A'}.$$

Cette méthode est directe, et donne des résultats assez simples. Toutefois, je montrerai plus loin comment on peut les simplifier encore.

Pour que le calculateur soit sûr d'arriver, sans trop de labeur, à un résultat suffisamment approché, il faut que les aires des polygones inscrit et circonscrit qu'il calcule successivement convergent rapidement l'une vers l'autre, et que l'on puisse aisément déterminer après combien d'opérations on aura l'approximation voulue. Ces conditions sont parfaitement satisfaites ici, puisque l'on a toujours

$$B' - A' < \frac{B - A}{4}.$$

Legendre a négligé de démontrer cette relation importante. En voici une démonstration donnée, je pense, par M. Catalan.



Soient CD , FG les côtés des polygones circonscrits de n et $2n$ côtés; AB , AE , les côtés des polygones inscrits correspondants.

Observons d'abord que les deux différences que nous comparons sont proportionnelles à AFE et $ACEH$. Conséquemment, il suffit de faire voir que le triangle AFE est moindre que le quart du trapèze $ACEH$ ou que l'on a :

$$FE < \frac{1}{4} (CE + AH).$$

Soit K le point de rencontre de la bissectrice OF avec AH : nous aurons $FE = AF = AK = KE$, attendu que AE est la bissectrice de l'angle FAB. L'inégalité précédente se réduit donc à :

$$FE < \frac{1}{2} (CF + KH).$$

Or, les deux triangles rectangles CAF, EHK sont semblables et ils donnent

$$\frac{CF}{EK} = \frac{AF}{KH}, \text{ ou } \frac{CF}{FE} = \frac{FE}{KH},$$

$$\text{ou } FE^2 = CF \cdot KH, \text{ ou } FE = \sqrt{CF \cdot KH}.$$

Mais on sait que la moyenne par quotient est moindre que la moyenne par différence : l'inégalité est donc démontrée.

V. On peut, étant donnés le rayon du cercle inscrit r et celui du cercle circonscrit R à un polygone régulier, déterminer les rayons correspondants r' et R' pour le polygone régulier équivalent d'un nombre de côtés double; continuant à doubler ce nombre, les deux rayons se resserrent indéfiniment. Or, le rayon du cercle équivalent au polygone donné devra évidemment être compris entre eux. On aura donc ce rayon avec tel degré d'approximation que l'on voudra. Divisant l'aire connue par le carré du rayon, on aura la valeur de π .

VI. Enfin, les mêmes éléments étant donnés, on peut calculer les rayons des cercles inscrit et circonscrit au polygone d'un nombre de côtés double, non plus équivalent, mais isopérimètre avec le premier.

Si l'on adopte les mêmes données que dans le problème précédent, on trouve

$$r' = \frac{R + r}{2}, R' = \sqrt{R r'},$$

expressions d'une simplicité remarquable.



Voici, pour ces formules, une démonstration analytique que j'avais trouvée avant de connaître les démonstrations géométriques qui en sont données par plusieurs auteurs.

Si O et O', ayant, le premier n , le second $2n$ côtés, sont isopérimètres, on aura évidemment :

$$AB = CD, \overline{AB}^2 = \overline{CD}^2, R^2 - r^2 = 4(R'^2 - r'^2) \quad (1).$$

De plus les triangles ABO, CDO', ayant même base, sont entre eux comme leurs hauteurs, et, ayant même angle au centre, sont aussi entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal, donc

$$r : r' = Rr : R'^2,$$

$$\text{ou } R'^2 = Rr', R' = \sqrt{Rr'},$$

ce qui démontre la seconde formule. Remplaçant R'^2 par sa valeur dans l'expression (1) il vient

$$R^2 - r^2 = 4(Rr' - r'^2).$$

$$r'^2 - Rr' = \frac{r^2 - R^2}{4}.$$

$$r' = \frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2 + r^2 - R^2}{4}} = \frac{R \pm r}{2}.$$

Remarquons maintenant que r' doit être plus grand que r , sans quoi en circonscrivant d'abord au cercle r' un polygone semblable à O, ce polygone vaudrait tout au plus O; or, en doublant le nombre de ses côtés on diminue son périmètre (appendice au livre IV, proposition X), donc il ne pourrait être isopérimètre avec O, ainsi $r' > r$; d'ailleurs, dans tout polygone régulier, le rayon du cercle inscrit vaut au moins la moitié de celui du cercle circonscrit, donc

$r' > \frac{R}{2}$, ce qui montre qu'il faut rejeter le signe inférieur. On a alors $r' = \frac{R + r}{2}$, ce qui est la première formule.

Calculant les rayons successifs, ceux-ci se rapprocheront indéfiniment, et comme la circonférence qui serait égale en longueur au périmètre donné devrait évidemment avoir un rayon toujours compris entre les deux rayons des polygones, on obtiendrait le rayon de cette circonférence avec telle approximation que l'on voudrait.

Divisant alors le périmètre donné par le double du rayon trouvé, on aurait π .

Cette méthode, qui conduit à des résultats si simples, se base sur l'évaluation de la circonférence; mais il est à remarquer que les formules de la première méthode de Legendre peuvent, comme M. Vincent l'a fait voir, se transformer de manière à devenir tout à

fait semblables à celles que nous venons de trouver. Reprenons les formules du n° IV :

$$A' = \sqrt{AB}, \quad B' = \frac{2AB}{A+A'}.$$

$$\text{Posons } A = \frac{1}{a}, \quad B = \frac{1}{b}, \quad A' = \frac{1}{a'}, \quad B' = \frac{1}{b'},$$

$$\text{il vient } \frac{1}{a'} = \sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}, \quad a' = \sqrt{ab},$$

$$\frac{1}{b'} = \frac{\frac{2}{ab}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}} = \frac{2}{b + \frac{ab}{a'}}, \quad b' = \frac{\frac{ab}{a'} + b}{2},$$

$$\text{mais } a'^2 = ab, \quad \frac{ab}{a'} = a', \quad \text{donc } b' = \frac{a' + b}{2}.$$

On est donc conduit, comme plus haut, à rechercher simplement une moyenne arithmétique et une moyenne géométrique.

La première méthode de Legendre est donc la meilleure, à plusieurs points de vue, et c'est pourquoi je l'ai adoptée dans le texte.

Remarquons encore qu'il n'est pas nécessaire ici de chercher le degré de convergence, puisque, d'après les relations trouvées plus haut, on sait *d'avance* après combien d'opérations on aura l'approximation voulue.

Tels sont les principaux moyens que présente la géométrie élémentaire pour déterminer π , mais l'analyse supérieure en fournit d'autres, infiniment plus expéditifs.

Pour terminer cette note, je rappellerai l'un de ces procédés.

On sait que la différentielle de $\text{arc sin } x$ est $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; or, si l'on développe $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ par le binôme de Newton généralisé, si l'on intègre successivement chaque terme, puis si l'on fait $x = \frac{1}{2}$, il vient

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2^5} + \text{etc., ...}$$

série convergente, dans laquelle il suffit de calculer quelques termes pour avoir un résultat très approché.

FIN.

58N 609168





